В. И. Арнольд
А. Н. Варченко
С. М. Гусейн-Заде

ОСОБЕННОСТИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Издание третье, стереотипное

Москва
Издательство МЦНМО
2009

УДК 513.775
ББК 22.16
А84

Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.

А84 Особенности дифференцируемых отображений. — 3-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2009. — 672 с.: ил.

ISBN 978-5-94057-456-9

Теория особенностей дифференцируемых отображений — бурно развивающаяся область современной математики, являющаяся грандиозным обобщением исследования функций на максимум и минимум и имеющая многочисленные приложения в математике, естествознании и технике (так называемые теории бифуркаций и катастроф). Первая часть книги посвящена теории устойчивости гладких отображений, критическим точкам гладких функций, особенностям каустик и волновых фронтов в геометрической оптике. Во второй части рассматриваются семейства комплексных гиперповерхностей, асимптотики интегралов многомерных методов стационарной фазы и перевала, приложения методов алгебраической геометрии к исследованию критических точек функций.

Для математиков — научных работников, аспирантов, студентов, а также для специалистов в области механики, физики, техники и других наук, интересующихся теорией особенностей дифференцируемых отображений.

Предыдущее издание книги вышло в 2004 г.

ББК 22.16

Владимир Игоревич Арнольд
Александр Николаевич Варченко
Сабир Меджидович Гусейн-Заде

ОСОБЕННОСТИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Редактор О. Васильева
Корректор А. Котова

Подписано в печать 19.11.2008 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 42. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.

ISBN 978-5-94057-456-9

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Формальная красота математики определяется так («Колмогоров». Книга 3. М.: Физматлит, 2003. С. 122):

«1. Нравятся сложные формы, удивляющие, несмотря на свою сложность, доступностью для наглядного понимания (циклоида и тому подобные кривые).

2. Нравится соединение без противоречия различных, казалось бы, не связанных закономерностей».

Предлагаемая книга о теории особенностей удовлетворяет именно этим двум условиям: она доставляет наглядное понимание сложнейших явлений физики, вроде каустик и волновых фронтов, включая детальный анализ циклоид и их обобщений — с одной стороны, а с другой — связывает воедино большинство областей прикладной и чистой математики, от вариационного исчисления до дифференциальной геометрии, от теории простых алгебр Ли до топологической теории узлов и кос, от многогранников Ньютона асимптотических разложений до алгебраической геометрии теории ветвления интегралов, от геометрической оптики и теории радуги до квантовой механики и теории адиабатических инвариантов, от теории чисел до диофантовой геометрии подмногообразий проективного пространства, от осциллирующих интегралов до многомерного метода перевала, от характеристических классов и кобордизмов до преобразований Лежандра и симплектической топологии лагранжевых многообразий и до дифференциальных уравнений Гамильтона классической и квантовой механики.

При этом неочевидные, но глубокие связи между всеми этими предметами становятся не только ясными проявлениями единства всего математического естествознания, но и применяются для облегчения исследований в каждой из указанных дисциплин при помощи методов других: сложное поведение управляемых динамических систем или систем лучей в оптически неоднородных средах оказывается объясненным симметриями правильных многогранников, вроде икосаэдра или пяти кубов Кеплера, вписанных им в додекаэдр, который Колмогоров сопроводил в своем дневнике («Колмогоров», с. 140) словами Гёте:

Jeder Weg zum rechten Zwecke
Ist auch recht in jeder Strecke.

Продолжая свое описание природы математики, Колмогоров писал в цитированном выше дневнике 1943 года («Колмогоров», с. 52): «В каждый данный момент существует лишь тонкий слой между тривиальным и недоступным. В этом слое и делаются математические открытия.»

Читатель настоящей книги вводится ею как раз в тот тонкий слой, где становится легко сделать шаг к недоступному. Книга рассчитана именно на желающего сделать этот шаг читателя.

Описывая мистические порой результаты теории особенностей, авторы старались избежать упрека, сделанного Колмогоровым Г. Вейлю («Колмогоров», с. 136): «нет уверенности, что он стремится всегда к простоте, а не к мистификации».

Именно простота излагаемых фундаментальных теорий, а не их непонятность, была основным принципом отбора материала для настоящей книги, значительную часть которой составляет теория простых особенностей и ее связи с теорией простых групп Ли и порожденных отражениями групп Кокстера (вроде группы симметрий додекаэдра).

Приложения этих теорий часто появляются под именами «Теории катастроф», «Квантовой теории катастроф». Мы оставляем читателю возможность самостоятельно оценить достигаемые этими терминологическими нововведениями более поздние варианты тех использованных теорией катастроф фундаментальных исходных фактов теории особенностей, которые мы излагаем ниже. Читатель получил бы больше, чем новая терминология, от решения той сотни задач, которой заканчивается третье издание книги В. И. Арнольда «Теория катастроф» (М.: Наука, 1990).

Со времени предыдущего издания настоящего сочинения вышло несколько новых книг на близкую тему; читателю можно порекомендовать «Особенности каустик и волновых фронтов» и «Волновые фронты и топология кривых» (М: Фазис, 1996; М.: Фазис, 2002) и указанную там литературу.

В. И. Арнольд

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ТОМУ ПЕРВОГО ИЗДАНИЯ

> ...нет ничего увлекательнее и грандиознее, ничто так не ошеломляет и не захватывает человеческого духа, как начало какой-нибудь науки. С первых же пяти-шести лекций вас уже окрыляют самые яркие надежды, вы уже кажетесь себе хозяином истины. И я отдался наукам беззаветно, страстно, как любимой женщине. Я был их рабом и, кроме них, не хотел знать никакого другого солнца. День и ночь, не разгибая спины, я зубрил, разорялся на книги, плакал, когда на моих глазах люди эксплуатировали науку ради личных целей. Но я недолго увлекался. Штука в том, что у каждой науки есть начало, но вовсе нет конца, все равно, как у периодической дроби. Зоология открыла тридцать пять тысяч видов...
>
> *А. П. Чехов.* На пути

В этой книге изложены начала «зоологии» особенностей дифференцируемых отображений. Эта теория — молодая отрасль анализа, занимающая в современной математике центральное положение: здесь пересекаются пути, ведущие от самых абстрактных отделов математики (алгебраическая и дифференциальная геометрия и топология, группы и алгебры Ли, комплексные многообразия, коммутативная алгебра и т. п.) к наиболее прикладным областям (дифференциальные уравнения и динамические системы, оптимальное управление, теория бифуркаций и катастроф, коротковолновые и перевальные асимптотики, геометрическая и волновая оптика).

Основные приложения теории особенностей заключаются в выделении и детальном исследовании в каждой ситуации небольшого набора наиболее часто встречающихся стандартных особенностей, которые только и могут быть у объектов общего положения: все более сложные особенности распадаются на простейшие при малом шевелении объекта. Мы приводим довольно полные списки, рисунки и определители таких простейших особенностей для целого ряда объектов (функций, отображений, многообразий, бифуркаций, каустик, волновых фронтов и т. д.), стараясь по возможности сократить читателю путь от исходных начал к приложениям. В соответствии с этим мы стремились изложить основные идеи, методы и результаты теории особенностей таким образом, чтобы читатель мог, не задерживаясь на обосновательной, теологической части теории, как можно быстрее научиться применять ее методы и результаты.

Особые усилия были приложены к тому, чтобы изложение основных идей и методов не заслонялось техническими деталями. С наибольшей подробностью рассматриваются наиболее фундаментальные и простые вопросы, в то время как изложение более специальных и трудных частей теории носит характер обзора.

У читателя настоящей книги предполагаются лишь очень небольшие математические познания (умение дифференцировать и немного линейной алгебры и геометрии) *). Авторы старались строить изложение так, чтобы читатель мог пропускать места, оказавшиеся для него трудными, без большого ущерба для понимания дальнейшего.

В настоящее время теория особенностей бурно развивается (ср., например, списки нерешенных задач в [18] и [251]), и мы не пытались охватить все многочисленные направления современных исследований по теории особенностей и ее приложениям (неполная библиография из примерно 500 работ имеется у Постона и Стюарта [428] и у Брискорна [274]).

Основу этой книги составил ряд спецкурсов, читавшихся на механико-математическом факультете МГУ в 1966—1978 гг. При подготовке книги были использованы записки лекций, составленные В. А. Васильевым, Е. Е. Ландис, А. Г. Хованским; А. Г. Хованским написан § 5. Авторы благодарны перечисленным лицам, а также участникам семинара по теории особенностей, помощью которых они широко пользовались, в особенности А. Г. Кушниренко, Е. И. Коркиной и В. И. Матову.

Комплексно-аналитические и алгебро-геометрические аспекты теории особенностей (монодромия, пересечения, асимптотики интегралов и смешанные структуры Ходжа) войдут в готовящуюся к изданию книгу «Особенности дифференцируемых отображений. Алгебро-топологические аспекты» **).

Ясенево, март 1979 г.

*) Читателя-нематематика полезно предупредить о терминологии:

1) многообразия — это многомерные обобщения кривых и поверхностей, а отображения — функций; диффеоморфизмы — это взаимно однозначные отображения, дифференцируемые вместе с обратными им;

2) преобразования множества — это взаимно однозначные отображения множества на себя; группа преобразований множества — это набор преобразований, содержащий наряду с каждым преобразованием обратное и наряду с каждыми двумя преобразованиями их произведение; группа — продукт аксиоматизации свойств групп преобразований;

3) алгебра есть продукт аксиоматизации свойств множества всех функций на многообразии (элементы алгебры, подобно функциям, можно складывать и умножать друг на друга и на числа, причем выполняются обычные правила ассоциативности, дистрибутивности и коммутативности; в алгебре отмечен элемент 1 со свойством $1f \equiv f$);

4) модуль над алгеброй есть продукт аксиоматизации свойств множества всех векторных полей на многообразии (элементы модуля можно складывать между собой и умножать на элементы алгебры);

5) идеал в алгебре — это ее подмодуль над самой собой. Пример: в алгебре всех функций на многообразии функции, обращающиеся в нуль на данном подмногообразии, образуют идеал.

**) Арнольд В. И., Варченко А. М., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов. М.: Наука, 1984. В настоящем издании это главы IV—VI. — *Прим. ред.*

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ТОМУ ПЕРВОГО ИЗДАНИЯ

Настоящая книга *) является продолжением книги Арнольд В. И., Варченко А. И., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. — М.: Наука, 1982 г.

Если предыдущая книга содержала начала зоологии особенностей дифференцируемых отображений, т. е. была посвящена описанию того, где и какие особенности могут встречаться, то эта книга содержит элементы анатомии и физиологии особенностей дифференцируемых функций. Это означает, что в ней рассматриваются вопросы строения особенностей и их функционирования.

Другой отличительной чертой настоящей книги является упор на вопросы, для которых важен выход в комплексную область, в то время как первая часть посвящена темам, для большинства из которых несущественно, над каким полем (вещественным или комплексным) они рассматриваются. Такие вопросы, как, например, распадение особенностей, связь особенностей с алгебрами Ли, асимптотики различных интегралов, зависящих от параметров, становятся яснее в комплексной области.

Книга состоит из трех глав **). В первой главе рассматривается топологическое строение изолированных критических точек голоморфных функций. Описываются основные топологические характеристики таких критических точек: исчезающие циклы, отмеченные базисы, матрицы пересечений, группы монодромии, оператор вариации — их взаимоотношения и методы вычислений.

Вторая глава посвящена исследованию асимптотик интегралов метода стационарной фазы, широко встречающихся в приложениях. Излагаются методы вычисления асимптотик, обсуждаются связи асимптотик с различными характеристиками критических точек фаз интегралов (разрешением особенностей, многогранниками Ньютона), приведены таблицы порядков асимптотик для критических точек фаз, которые расклассифицированы в предыдущей книге (в частности, для простых, унимодальных и бимодальных).

---

*) Первое издание книги вышло в двух томах, соответствующих частям I и II настоящего издания. — *Прим. ред.*

**) В настоящем издании это главы IV—VI. — *Прим. ред.*

Третья глава посвящена интегральному исчислению на многообразиях уровня критической точки голоморфной функции. В ней рассматриваются интегралы голоморфных форм, заданных в окрестности критической точки, по циклам, лежащим на гиперповерхностях уровня функции. Интеграл голоморфной формы по циклу голоморфно изменяется при непрерывной деформации цикла из одной гиперповерхности уровня в другую. Таким образом возникают многозначные голоморфные функции, заданные на комплексной прямой в окрестности критического значения функции. Оказывается, что асимптотики этих функций (т. е. асимптотики интегралов) при стремлении уровня к критическому связаны с разнообразными характеристиками исходной критической точки голоморфной функции.

Теория особенностей является обширной и быстро развивающейся областью математики, и мы не стремились затронуть все ее направления.

Список литературы содержит работы, непосредственно связанные с текстом (хотя иногда и не цитируемые в нем), а также работы, связанные с предыдущей книгой, по тем или иным причинам не вошедшие в ее библиографию.

Авторы благодарны участникам семинара по теории особенностей МГУ, в особенности — А. М. Габриэлову, А. Б. Гивенталю, А. Г. Кушниренко, Д. Б. Фуксу, А. Г. Хованскому. Авторы благодарны также В. С. Варченко и Т. В. Огородниковой, оказавшим большую помощь при подготовке рукописи к печати.

Авторы

Часть I

КЛАССИФИКАЦИЯ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК, КАУСТИК И ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ

Г Л А В А I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Теория особенностей гладких отображений представляет собой далекое обобщение исследования функций одной переменной на максимум и минимум. Таким образом, особенности, о которых идет речь, связаны не с разрывами и полюсами, а с обращением в нуль некоторых производных или якобианов.

В настоящей главе вводятся основные понятия теории особенностей дифференцируемых отображений: особые точки, их локальные алгебры и другие инварианты; определяются понятия, связанные с устойчивостью, и приводится начало классификации особенностей.

§ 1. Простейшие примеры

Здесь описана принадлежащая Х. Уитни классификация особенностей гладких отображений пространств малых размерностей.

1.1. Критические точки функций. Точка x называется *критической точкой*функции f, если в этой точке производная функции f равна нулю.

П р и м е р. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция, заданная формулой $y = x^2$. Точка 0 — критическая точка этой функции.

Критические точки функции делятся на критические точки общего положения, или невырожденные, и вырожденные критические точки.

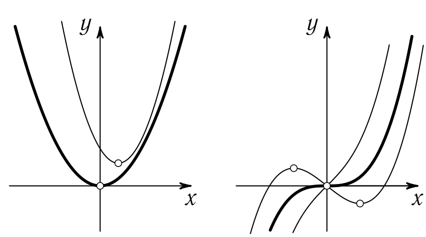

Рис. 1

О п р е д е л е н и е. Критическая точка гладкой функции называется *невырожденной*, если второй дифференциал функции в этой точке — невырожденная квадратичная форма.

П р и м е р. Критическая точка 0 функции $y = x^2$ невырождена, а критическая точка 0 функции $y = x^3$ вырождена (рис. 1).

Рассмотрим любую гладкую функцию, близкую (с производными) к функции $y = x^2$. Ясно, что вблизи нуля эта функция будет иметь критическую точку, подобную критической точке функции $y = x^2$. В этом смысле критическая точка функции $y = x^2$ устойчива: при малом шевелении функции она не исчезает, но лишь слегка сдвигается.

Совершенно иначе ведет себя при малых шевелениях вырожденная критическая точка функции $y = x^3$.

Пример. Рассмотрим семейство функций одной переменной $y = x^3 + \varepsilon x$. При малых ε функции семейства можно рассматривать как малое шевеление функции $y = x^3$. Мы видим, что при этом шевелении вырожденная критическая точка $x = 0$ либо исчезает (при $\varepsilon > 0$), либо распадается на две невырожденных, на расстоянии порядка $\sqrt{|\varepsilon|}$ от нее (при $\varepsilon < 0$).

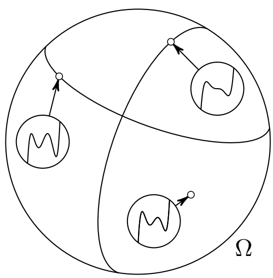

Рис. 2

Таким образом, критическая точка функции $y = x^2$ устойчива, а функции $y = x^3$ — неустойчива.

В случае функций одной переменной разобраться во всей ситуации нетрудно. Рассмотрим пространство Ω всех интересующих нас функций *).

Выделим в этом пространстве множество функций, имеющих вырожденные критические точки или имеющих совпадающие значения в разных критических точках (рис. 2). [В случае, когда область определения — отрезок, мы будем причислять концевую точку к критическим, считая ее невырожденной, если производная в ней ненулевая.] Нетрудно сообразить, что такие «вырожденные» функции образуют тощее множество, а именно гиперповерхность, т. е. поверхность коразмерности один, «задаваемую одним уравнением», в нашем пространстве функций (ниже мы как придадим этим словам точный смысл, так и докажем соответствующую теорему в более общей ситуации). Указанная гиперповерхность делит наше пространство функций на части, в каждой из которых все функции «устроены одинаково»: их значения в последовательных критических точках идут для всех функций в каждой из указанных областей в одном порядке. Функции, не имеющие ни вырожденных критических точек, ни кратных критических значений, называются *функциями Морса*. При малом шевелении функция Морса «сохраняет свой вид» и может быть превращена в исходную функцию гладкими заменами независимой и зависимой переменных x и y. В этом смысле функция Морса устойчива. Таким образом, в рассматриваемом случае отображений с одномерными пространствами прообразов и образов устойчивые отображения образу-

*) Это может быть пространство бесконечно дифференцируемых или достаточно гладких функций, или пространство аналитических функций, или даже пространство многочленов; область определения функций удобно считать компактной, рассматривая функции на окружности или на отрезке.

ют открытое всюду плотное множество в пространстве всех отображений. При этом устойчивые отображения допускают достаточно явное описание и классификацию, а неустойчивые, хотя и могут быть устроены гораздо более сложным образом (множество критических точек гладкой функции может быть произвольным замкнутым множеством), превращаются в устойчивые при малом шевелении: каждая сложная особенность рассыпается на несколько невырожденных, устойчивых.

Идеал, к которому стремится теория особенностей, достигнут в частном случае отображений на прямую (теория Морса). Интересующие нас результаты теории Морса можно сформулировать следующим образом.

Т е о р е м а. 1) *Устойчивые отображения* $f\colon M^m \to \mathbb{R}^1$ *замкнутого* *) *многообразия* M^m *на прямую образуют всюду плотное множество в пространстве всех гладких отображений.*

2) *Чтобы отображение* f *было устойчивым, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий.*

M_1. *Отображение* f *устойчиво в каждой точке* (*иначе говоря, все критические точки функции* f *невырождены*).

M_2. *Все критические значения функции* f *различны.*

3) *Отображение* $f\colon M^m \to \mathbb{R}^1$ *устойчиво в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда в окрестностях точек* $x_0 \in M^m$ *и* $y_0 = f(x_0) \in \mathbb{R}^1$ *можно так ввести координаты* $x_1, \ldots, x_m$; y, *что отображение запишется в одном из* $m+2$ *видов*:

MI) $y = x_1$,

MII_k) $y = x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_m^2$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$.

Доказательство см., например, в [173].

Возникает вопрос, сохранится ли такое положение в больших размерностях, т. е. для отображений $f\colon M^m \to N^n$ многообразий произвольных размерностей m и n.

1.2. Критические точки и критические значения гладких отображений. Рассмотрим дифференцируемое отображение $f\colon M^m \to N^n$. Прежде всего, мы должны перенести на этот случай понятие критической точки. Производная отображения f в точке x представляет собой линейное отображение касательного пространства к многообразию-прообразу в точке x в касательное пространство к многообразию-образу в точке $f(x)$:

$$f_{*x}\colon T_xM^m \to T_{f(x)}N^n.$$

П р и м е р. Пусть M^2 — поверхность сферы в трехмерном пространстве, N^2 — плоскость, f — проектирование сферы вдоль вертикали на горизонтальную плоскость (рис. 3).

*) Здесь и далее замкнутое многообразие — это компактное многообразие без края.

Линейное отображение f_{*x} плоскости T_xM, касательной к сфере в точке x, в плоскость $T_{f(x)}N$, касательную к горизонтальной плоскости, является невырожденным линейным отображением, если точка x не принадлежит горизонтальному экватору сферы. Если же x — точка экватора, то касательная плоскость к сфере в точке x содержит вертикальную прямую. В этом случае оператор проектирования f_{*x} имеет нетривиальное ядро (подпространство, переходящее в нуль). Ядро оператора f_{*x} в точках экватора одномерно. Ранг оператора f_{*x} в этих точках равен 1.

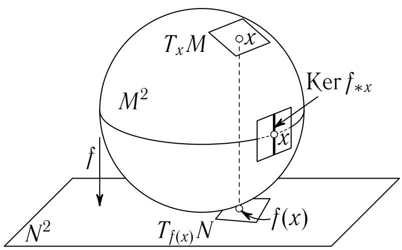

Рис. 3

Дадим теперь общее определение.

Определение. Точка x многообразия M называется *критической точкой* для гладкого отображения $f\colon M \to N$, если ранг производной

$$f_{*x}\colon T_xM \to T_{f(x)}N$$

в этой точке меньше максимально возможного, т. е. меньше меньшей из размерностей многообразий M и N:

$$\operatorname{rank} f_{*x} < \min(\dim M, \dim N).$$

Замечание. Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — локальные координаты в окрестности точки x на M и $y_1, \ldots, y_n$ — в окрестности точки $f(x)$ на N. Отображение f задается в этих координатах n гладкими функциями от m переменных:

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m), \quad \ldots, \quad y_n = f_n(x_1, \ldots, x_m).$$

Матрица $(\partial f_i/\partial x_j)$ называется *матрицей Якоби* отображения. В этих терминах можно сказать, что *точка x является критической, если ранг матрицы Якоби в этой точке не максимален.*

Пример. Для отображения проектирования сферы на горизонтальную плоскость критическими точками являются точки горизонтального экватора. Вне экватора ранг производной равен 2, в точках же экватора ранг оператора f_{*x} падает до 1.

Образ критической точки называется *критическим значением.*

Пример. Критические значения отображения проектирования сферы на плоскость образуют окружность видимого контура сферы.

1.3. Дифференцируемая эквивалентность. При классификации гладких отображений имеется несколько разных возможностей. По-видимому, наиболее грубая классификация — топологическая: мы считаем два отображения *топологически эквивалентными*, если существуют гомеоморфизмы (взаимно однозначные взаимно непрерывные отображения) многообразий прообраза и образа, превращающие одно отображение в другое. Функции $y = x^2$ и $y = x^4$ топологически эквивалентны.

Если $f_p\colon M_p \to N_p$, $p = 1, 2,$ — два данных отображения, то их топологическая эквивалентность означает, что существуют такие гомеоморфизмы $h\colon M_1 \to M_2$ и $k\colon N_1 \to N_2$, что $f_2 = kf_1h^{-1}$.

Иными словами, топологическая эквивалентность — это коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h"'] & N_1 \arrow[d, "k"] \\ M_2 \arrow[r, "f_2"] & N_2 \end{tikzcd}$$

в которой вертикальные стрелки — гомеоморфизмы.

Для целей анализа топологическая эквивалентность, как правило, слишком грубое понятие. Например, функция с вырожденной, неустойчивой особенностью $y = x^4$ топологически эквивалентна устойчивой. Поэтому в теории особенностей основным является другое понятие: понятие дифференцируемой эквивалентности.

О п р е д е л е н и е. *Дифференцируемой эквивалентностью* дифференцируемых отображений $f_1\colon M_1 \to N_1$ и $f_2\colon M_2 \to N_2$ называется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h"'] & N_1 \arrow[d, "k"] \\ M_2 \arrow[r, "f_2"] & N_2 \end{tikzcd}$$

вертикали которой — диффеоморфизмы (взаимно однозначные отображения, дифференцируемые вместе со своими обратными *)).

З а м е ч а н и е 1. На языке локальных координат отображение $y = f(x)$ — это набор функций, диффеоморфизм h — это замена независимых переменных x, диффеоморфизм k — замена зависимых переменных y. С этой точки зрения вопрос о дифференцируемой эквивалентности есть вопрос о том, можно ли превратить одно отображение в другое при помощи гладких замен независимых и зависимых переменных.

З а м е ч а н и е 2. Выписанная выше коммутативная диаграмма означает тождество

$$k(f_1(h^{-1}(x))) \equiv f_2(x).$$

*) Здесь и далее слово *дифференцируемый* или *гладкий* означает, если не оговорено противное, «непрерывно дифференцируемый нужное число раз», например бесконечно дифференцируемый.

В этой формуле h^{-1} стоит *справа* от f_1, а k — *слева*. Поэтому диффеоморфизмы h^{-1} пространства прообразов (и замены независимых переменных x) называют еще *правыми заменами*. Точно так же диффеоморфизмы k пространств образов (и замены зависимых переменных y) называют *левыми заменами*.

Замечание 3. Еще один способ выразить то же самое состоит в следующем. Рассмотрим множество $\Omega(M, N)$ всех гладких отображений из M в N. Рассмотрим группу $\operatorname{Diff} M$ всех диффеоморфизмов многообразия прообразов M на себя и группу $\operatorname{Diff} N$ всех диффеоморфизмов многообразия образов N на себя.

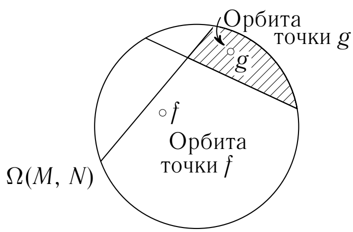

Рис. 4

Прямое произведение групп

$$\operatorname{Diff} M \times \operatorname{Diff} N$$

состоит из всех пар (h, k) диффеоморфизмов пространств прообраза $(h\colon M \to M)$ и образа $(k\colon N \to N)$.

Группа $\operatorname{Diff} M \times \operatorname{Diff} N$ действует на множестве $\Omega(M, N)$ следующим образом: если $f \in \Omega(M, N)$, $h \in \operatorname{Diff} M$, $k \in \operatorname{Diff} N$, то $(h, k)f = k \circ f \circ h^{-1}$.

Нетрудно проверить, что это действительно действие, т. е. что

$$(h_1 h_2, k_1 k_2)f = (h_1, k_1)((h_2, k_2)f).$$

Это действие называется *лево-правым* *) (действие $\operatorname{Diff} M$ называется *правым*, а действие $\operatorname{Diff} N$ — *левым*).

В этих терминах мы можем переформулировать определение дифференцируемой эквивалентности так: *два отображения M в N дифференцируемо эквивалентны, если и только если они принадлежат одной орбите лево-правого действия* (рис. 4).

Пример. Связные компоненты множества всех функций Морса (определенных в п. 1.1) являются орбитами лево-правого действия.

1.4. Устойчивость. Рассмотрим гладкое отображение $f\colon M \to N$ замкнутого многообразия M в многообразие N.

Определение. Отображение f называется *дифференцируемо устойчивым* (или подробнее *лево-право-дифференцируемо устойчивым*, или короче — просто *устойчивым*), если всякое достаточно близкое **) к нему отображение ему дифференцируемо эквивалентно.

Иными словами, f устойчиво, если его лево-правая орбита открыта.

*) Не путайте с левым действием в алгебраической терминологии.

**) Достаточно мало отличающееся от f при учете достаточно большого числа производных.

Пример. Отображение проектирования сферы на плоскость устойчиво. Отображение окружности $\{x \bmod 2\pi\}$ в прямую $\{y\}$, заданное формулой $y = \sin 2x$, неустойчиво.

Замечание. Если заменить дифференцируемую эквивалентность в предыдущем определении топологической, то получится определение *топологической устойчивости*.

Пример. Отображение проектирования сферы на плоскость топологически устойчиво, как и всякое дифференцируемо устойчивое отображение. Топологически устойчивые, но дифференцируемо неустойчивые отображения существуют, но указать пример не так легко (см. [160]). Формула $y = \sin 2x$ задает топологически неустойчивое отображение окружности в прямую.

Существуют также локальные варианты введенных понятий. Например, особенность функции $y = x^2$ в нуле устойчива, а особенность функции $y = x^3$ в нуле неустойчива. Чтобы дать формальное определение устойчивости отображения в точке, мы воспользуемся следующей терминологией.

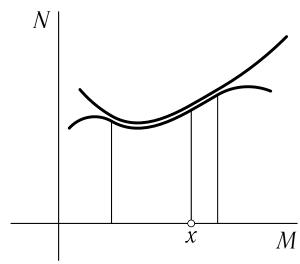

Рис. 5

Определение. *Ростком отображения $M \to N$ в точке x* из M называется класс эквивалентности отображений $\varphi\colon U \to N$ (каждое из которых определено в некоторой (своей) окрестности U точки x в M); здесь два отображения считаются эквивалентными, если они совпадают в некоторой окрестности точки x (эта окрестность имеет право быть меньшей, чем пересечение окрестностей, в которых определены оба отображения). Про два отображения из одного класса говорят также, что они имеют *общий росток в точке x* (рис. 5).

Иными словами, росток отображения f в точке x — это то, что от отображения остается, когда мы «бесконечно уменьшаем область определения».

Определение. Два ростка гладких отображений называются (*лево-право*, *дифференцируемо*) *эквивалентными*, если существуют ростки диффеоморфизмов прообраза и образа, переводящие первый росток во второй (если росток отображения f_1 в x_1 эквивалентен ростку отображения f_2 в x_2, то существуют росток в x_1 диффеоморфизма h, переводящего x_1 в x_2, и росток в $f_1(x_1)$ диффеоморфизма k, переводящего $f_1(x_1)$ в $f_2(x_2)$, такие, что $k(f_1(h^{-1}(x))) \equiv f_2(x)$ в достаточно малой окрестности точки x_2). Класс эквивалентности ростка в критической точке называется *особенностью*.

Определение. Росток гладкого отображения $f\colon M \to N$ в точке x из M (рис. 6) называется (*лево-право*, *дифференцируемо*) *устойчивым*, если для сколь угодно малой окрестности U точки x существует такая окрестность E отображения *) f в $\Omega(M, N)$, что для любого отображения $\tilde{f}$ из E в U найдется такая точка $\tilde{x}$, что росток отображения $\tilde{f}$ в $\tilde{x}$ эквивалентен ростку отображения f в x.

Нетрудно проверить, что устойчивость в точке — свойство ростка, а не отображения: это свойство не теряется при изменениях f, не затрагивающих хоть какую-нибудь окрестность точки x.

Аналогично определяются *топологическая эквивалентность ростков* и *топологическая устойчивость ростков*.

Пример. Ростки отображений $y = x^2$ и $y = x^4$ вещественной прямой в нуле топологически эквивалентны. Росток отображения $y = x^2$ в 0 топологически (и даже дифференцируемо) устойчив. Росток отображения $y = x^4$ в 0 дифференцируемо (и даже топологически) неустойчив.

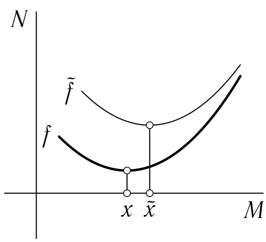

Рис. 6

1.5. Устойчивые отображения двумерных многообразий на двумерные. Начнем с уже рассматривавшегося примера — отображения проектирования сферы на плоскость (рис. 3). Особенности проектирования — это точки на экваторе сферы. Нетрудно сообразить, что росток отображения в каждой точке экватора устойчив.

Трудно представить себе, чтобы существовали другие устойчивые особенности отображений двумерных многообразий на двумерные. Действительно, то, что мы видим, рассматривая гладкие поверхности трехмерных тел, — это видимые контуры, состоящие из критических значений отображения проектирования поверхности на сетчатку глаза. Обычно нам кажется, что эти видимые контуры состоят из гладких кривых. Однако, поглядев вокруг себя (скажем, на лица окружающих нас людей) более внимательно, мы можем обнаружить, наряду с особенностями типа особенности проектирования на экваторе сферы, особенности еще одного типа. Эти особенности были открыты Х. Уитни, который в работе 1955 г. [502] полностью описал особенности отображений общего положения двумерных многообразий на двумерные. Эта работа Уитни является основополагающей для теории особенностей, датой рождения которой считается поэтому 1955 год.

Уитни установил, что *всякое гладкое отображение компактного двумерного многообразия в двумерное может быть как угодно*

---

*) Окрестность данного отображения — это множество всех отображений, мало отличающихся от данного с учетом производных до фиксированного порядка. В интересующем нас сейчас локальном случае можно считать, что $M \subset \mathbb{R}^m$ и $N \subset \mathbb{R}^n$ — области евклидовых пространств и E задается неравенствами $\|(\tilde{f} - f)\|_k < \varepsilon$, где $\|g\|_k = \sup\limits_{|\alpha| \leqslant k} |\partial^\alpha g/\partial x^\alpha|$.

близко (с любым числом производных) аппроксимировано устойчивым отображением.

Далее он исследовал строение устойчивых отображений. Росток такого отображения в каждой точке устойчив. Уитни описал все устойчивые ростки отображений двумерных многообразий (их оказалось, с точностью до дифференцируемой эквивалентности, ровно 3). Наконец, он доказал, что отображение компактного двумерного многообразия на двумерное устойчиво, если его росток в каждой точке устойчив и критические значения расположены «общим образом» (это — обобщение условия несовпадения критических значений в разных критических точках для функций Морса, см. п. 1.1).

Теорема Уитни. *Отображение двумерного многообразия в двумерное устойчиво в точке тогда и только тогда, когда в подходящих локальных координатах* (x_1, x_2) *в прообразе и* (y_1, y_2) *в образе отображение записывается в одном из трех видов*:

УI) $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ (*регулярная точка*);

УII) $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2$ (*складка*);

УIII) $y_1 = x_1^3 + x_1x_2$, $y_2 = x_2$ (*сборка*)

(*рассматриваемая точка имеет координаты* $x_1 = x_2 = 0$).

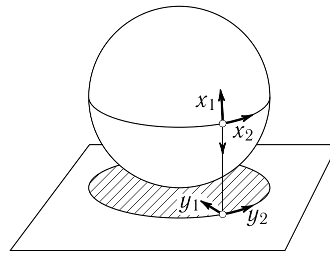

Рис. 7

Иными словами, каждый устойчивый росток отображения двумерного многообразия на двумерное дифференцируемо эквивалентен одному их трех ростков отображений приведенного списка в нуле.

Первый из приведенных ростков — это росток диффеоморфизма. К такому виду приводится всякое гладкое отображение двумерных многообразий в окрестности некритической точки.

Особенность отображения второго типа называется *складкой*. Это отображение плоскости на плоскость можно рассматривать как семейство отображений прямой на прямую ($y_1 = x_1^2$), зависящих (тривиальным образом) от одного параметра ($y_2 = x_2$).

Пример. Проектирование сферы на горизонтальную плоскость имеет на горизонтальном экваторе особенность типа складки, в чем легко убедиться, выбрав подходящие локальные координаты (x_2 и y_2 — долгота, x_1 — широта, см. рис. 7).

1.6. Сборка Уитни. *Сборкой Уитни* называется третья устойчивая особенность приведенного выше списка, т. е. особенность отображения

$$y_1 = x_1^3 + x_1x_2, \quad y_2 = x_2$$

в нуле. Чтобы ясно представить себе эту особенность, реализуем ее как особенность вертикального проектирования гладкой поверхности из трехмерного пространства на горизонтальную плоскость.

С этой целью рассмотрим график функции $y_1 = x_1^3 + x_1 x_2$ в трехмерном пространстве с координатами (x_1, x_2, y_1) (рис. 8). График этот диффеоморфен плоскости (всякий график гладкого отображения диффеоморфен области определения): качестве координат на графике можно взять x_1 и x_2. Рассмотрим пересечение графика с вертикальной плоскостью $x_2 = \text{const}$. При фиксированном значении x_2 уравнение $y_1 = x_1^3 + x_1 x_2$ определяет кубическую параболу, лежащую в вертикальной плоскости. Несколько таких парабол изображено на рис. 8.

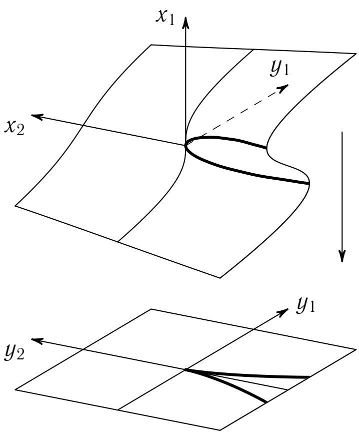

Рис. 8

Если $x_2 > 0$, то вдоль соответствующей кубической кривой y_1 монотонно растет вместе с x_1. Если же $x_2 < 0$, то y_1 имеет две критические точки — локальный максимум и локальный минимум.

Рассмотрим теперь проектирование нашего графика на горизонтальную плоскость: $(x_1, x_2, y_1) \mapsto (x_2, y_1)$. Полученное гладкое отображение поверхности на плоскость имеет в начале координат особенность типа сборки. Действительно, рассмотрим следующие системы координат: (x_1, x_2) — на графике, $(y_1, y_2 = x_2)$ — на горизонтальной плоскости. В этих координатах отображение проектирования записывается в точности формулами сборки Уитни. Теорема Уитни утверждает, что особенность устойчива. В частности, при малом шевелении нашей поверхности в трехмерном пространстве образуется поверхность, проектирование которой на горизонтальную плоскость имеет в некоторой близкой к началу координат точке подобную же особенность.

З а д а ч а. Найти критические точки отображения Уитни

$$y_1 = x_1^3 + x_1 x_2, \qquad y_2 = x_2.$$

Р е ш е н и е. Матрица Якоби имеет вид

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + x_2 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В критических точках ранг этой матрицы меньше двух, т. е. ее определитель равен нулю: $3x_1^2 + x_2 = 0$. Следовательно, множество критических точек — гладкая кривая. На плоскости с координатами (x_1, x_2) уравнение $3x_1^2 + x_2 = 0$ задает параболу (рис. 9).