В. И. Арнольд

Математическое понимание природы

Очерки удивительных физических явлений и их понимания математиками (с рисунками автора)

Издание третье, стереотипное

Москва
Издательство МЦНМО
2011

УДК 51.009
ББК 22.1
А84

Издание подготовлено при поддержке
Фонда Дмитрия Зимина «Династия»

Арнольд В. И.

А84 Математическое понимание природы: Очерки удивительных физических явлений и их понимания математиками (с рисунками автора). — 3-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2011. — 144 с.

ISBN 978-5-94057-744-7

Сборник «Задачи для детей от 5 до 15 лет» вызвал много отзывов. И дети, и взрослые читатели часто сожалели, что там были только математические задачи, — ведь и всё естествознание заслуживает столь же активного, творческого к себе отношения. Теперь я отвечаю на эти пожелания — следуя скорее Яну Амосу Каменскому, чем современным педагогам, то есть всегда стремясь быть понятным читателю, не имеющему предварительных знаний (но столь же любознательному, как большинство подростков).

ББК 22.1

Владимир Игоревич Арнольд

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПОНИМАНИЕ ПРИРОДЫ

Обложка Р. А. Кокшарова
Фото С. Ю. Третьяковой

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.
Тел. (499) 241-74-83

Подписано в печать 03.03.2011 г. Формат $70\times100\,{}^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 9. Тираж 2000. Заказ .

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Принт Сервис Групп».
Москва, 2-й Лихачёвский пер., д. 7.

ISBN 978-5-94057-744-7
9 785940 577447 >

Предисловие

Расследование убийства привело кинорежиссёра (в детективной повести «Коррида» В. Токаревой) к выводу: «математика — это то, что можно объяснить».

Основной вклад математики в естествознание состоит вовсе не в формальных вычислениях (или других применениях готовых математических достижений), а в исследовании тех неформальных вопросов, где точное выяснение постановки вопроса (того, что именно следует искать и какие именно модели использовать) составляет обычно полдела.

Собранные ниже 38 очерков преследуют именно эту цель: научить читателя не столько умножать большие числа (что иногда тоже приходится делать), но и догадываться о неожиданных связях непохожих на вид явлений и фактов, относящихся порой к разным областям естествознания и других наук.

Примеры учат не меньше, чем правила, а ошибки — больше, чем правильные, но непонятные доказательства. Разглядывая рисунки настоящей книги, читатель сможет понять больше, чем выучивая десятки аксиом (даже вместе с выводом из них следствий о том, куда впадает Волга и что едят лошади).

Б. Пастернак писал, что «вопрос о пользе поэзии возникает только при её упадке, в то время как в периоды её процветания никто не сомневается в полной её бесполезности».

Математика — не совсем поэзия, но я и в ней стремлюсь не допустить упадочничества, проповедуемого врагами всех естественных наук.

Добавлю ещё, что Нильс Бор делил верные утверждения на два класса: тривиальные и гениальные. А именно, он считал верное утверждение тривиальным тогда, когда противоположное утверждение является очевидно неверным, и гениальным тогда, когда оно столь же неочевидно, как и исходное утверждение, так что вопрос о справедливости утверждения, противоположного к исходному, интересен и заслуживает исследования.

Пользуюсь случаем поблагодарить Н. Н. Андреева, заставившего меня написать эту книжку.

От издательства. Владимир Игоревич Арнольд ушёл из жизни 3 июня 2010 года. Он участвовал в подготовке данного, второго издания, но увидеть корректуру (затрагивающую только очерки на с. 27—28 и 40—42) не успел.

Эксцентриситет кеплеровой орбиты Марса

Математическая модель следующих задач одинакова:

Гипотенуза прямоугольного треугольника имеет длину 1 м, а катет — 10 см. Найти длину второго катета.

Математическое «решение» — по теореме Пифагора

$$\sqrt{1-(1/10)^2}\ \text{м}$$

— неудовлетворительно. Дело в том, что, поскольку

$$(1-a)^2 = 1 - 2a + a^2 \approx 1 - 2a$$

(при малых a с весьма малой ошибкой a^2),

$$\sqrt{1-A} \approx 1 - A/2.$$

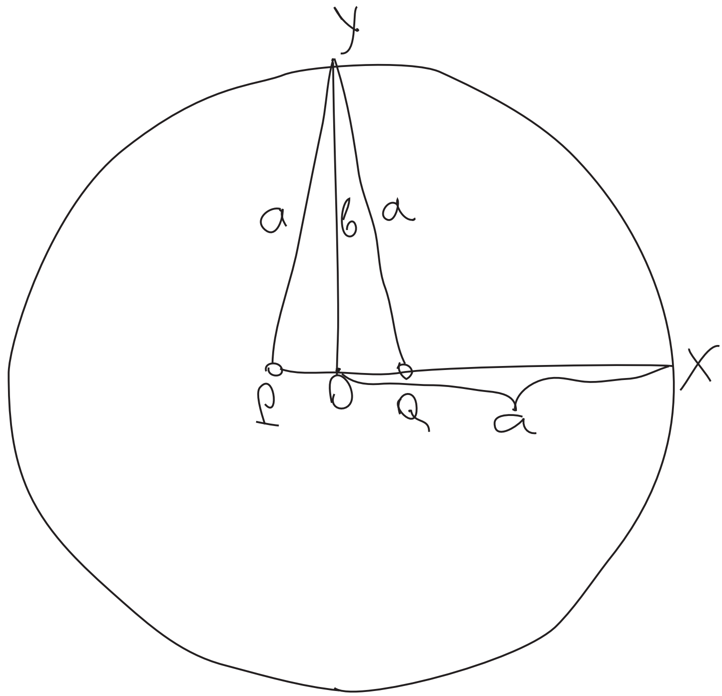
В случае $A = 1/100$ получается $1 - \dfrac{1}{200}$ м, т. е. 99,5 см: длинный катет на вид неотличим по длине от гипотенузы, разница в полпроцента незаметна, хотя малый угол треугольника не так уж мал (около 6°).

Эксцентриситет кеплерова эллипса Марса составляет примерно 0,1. *Когда Кеплер нарисовал*[1] *орбиту Марса, он принял её за окружность, со смещённым из центра Солнцем. Почему он так ошибся?*

Решение. Эллипс — это геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых до двух фиксированных (называемых фокусами) точек P и Q постоянна. Обозначим эту сумму расстояний через $2a$. Тогда для

[1]На основании глазомерных наблюдений своего учителя Тихо Браге, сделанных за много десятков лет в обсерватории Ураниборг, на принадлежавшем Тихо Браге острове между Эльсинором и Копенгагеном: впоследствии Ньютон посылал в эту обсерваторию Галлея с телескопом, чтобы доказать, что и телескопические наблюдения могут давать столь же высокую точность, что и наблюдения Тихо Браге.

эллипса с центром O (посредине между фокусами) и полуосями OX и OY мы находим
$|OX| = a$ (поскольку $|PX| + |QX| = 2a$);
$|QY| = a$ (поскольку $|PY| = |QY|$, $|PY| + |YQ| = 2a$).
$|OQ| = ea$ (это — определение эксцентриситета e).



Из прямоугольного треугольника OYQ мы находим

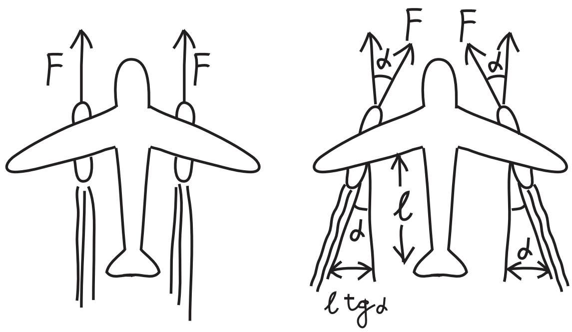
$$|OY| = \sqrt{|QY|^2 - |OQ|^2} = \sqrt{a^2 - a^2e^2} = a\sqrt{1-e^2} \approx a(1 - e^2/2).$$

Для эксцентриситета $e = 0{,}1$ фокус сдвинут от центра на 10% длины большой полуоси, $|OX| = a$, а малая ось короче большой всего на полпроцента (какой разницы Кеплер вначале и не заметил).

Спасение хвостового оперения самолётов

Реактивная струя из моторов первых реактивных самолётов сжигала хвостовое оперение. Но конструкторы предложили слегка повернуть моторы (на небольшой угол α). Струя перестала сжигать хвостовое оперение (отклонившись на $l\,\mathrm{tg}\,\alpha$, где l — расстояние до него).

Какой частью силы тяги $2F$ пришлось для этого пожертвовать?



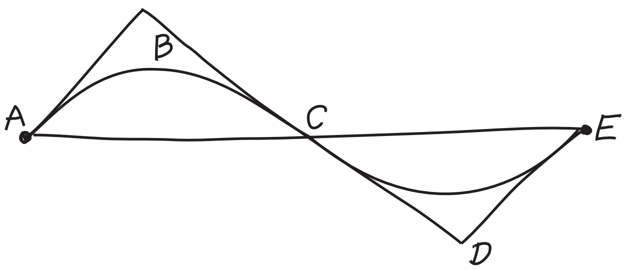
Решение. Результирующая сила тяги составляет

$$2F\cos\alpha \approx 2F(1-\alpha^2/2).$$

При вполне заметном отклонении в 3° находим $\alpha \approx$ $\approx 1/20$ радиана, т. е. потеря $\alpha^2/2$ составляет $1/800$ силы тяги, что пренебрежимо мало (тогда как отклонение струи $l\,\mathrm{tg}\,\alpha \approx l/20$ достигает нескольких метров).

Возвращение по синусоиде

Возвращаясь домой по синусоиде, пьяница удлиняет свой путь. Во сколько раз он его удлиняет?



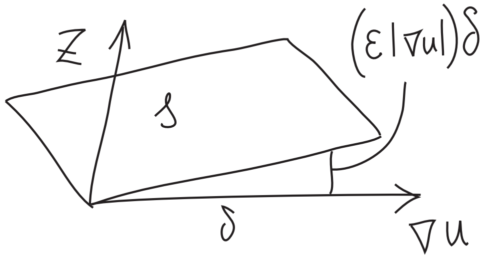
Решение. Примерно на 20%. Большинство думает, что синусоида вдвое длиннее прямой, или хотя бы раза в полтора. Но на самом деле даже пилообразный путь $ABCDE$ длиннее прямого (AE) всего в $\sqrt{2}$ раз, т. е. примерно на 40%.

Синусоидальный же путь гораздо короче. Дело в том, что часть синусоиды, где она наклонена к AE под углом α, длиннее своей проекции на прямую AE примерно в $\sqrt{1+\alpha^2} \approx 1 + \alpha^2/2$ раз. Поэтому даже те части синусоиды, где она наклонена на 20°, длиннее своих проекций всего на $(1/3)^2/2 \approx 1/20$ своей длины (5%). Серьёзно удлиняют путь только близкие к точкам перегиба (A, C и E) участки, но они невелики, поэтому суммарное удлинение пути и получается столь малым: вдоль бо́льшей части синусоиды удлинение малозаметно.

Интеграл Дирихле и оператор Лапласа

Мембрану $z=0$ *слабо изогнули (в трёхмерном пространстве с декартовыми координатами* (x, y, z)*) так, что она стала графиком малой функции* $z = \varepsilon u(x, y)$ *(где* ε *мало).*

Насколько площадь изогнутой мембраны больше площади исходной плоской мембраны?



Решение. В первом (неисчезающем) приближении, около каждой точки мембрана вытягивается в направлении градиента $\operatorname{grad} u$ функции u (как гипотенуза по сравнению с большим катетом прямоугольного треугольника с тангенсом малого угла $\varepsilon|\operatorname{grad} u|$). Поэтому приращение элемента площади s, с точностью до ε^2, пропорционально квадрату отклонения:

$$\delta s = \frac{1}{2}\varepsilon^2|\nabla u|^2 = \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right).$$

Иными словами, приращение всей площади мембраны есть интеграл (Дирихле)

$$\delta S = \frac{\varepsilon^2}{2}\iint\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)dx\,dy + o(\varepsilon^2).$$

Замечание. Можно показать, что интеграл Дирихле выражает не только приращение площади мембраны, но также и её потенциальную энергию (т. е. работу изгибающей мембрану силы при переведении её из состояния $z=0$ в состояние $z=\varepsilon u(x, y)$).

Доказательство этого (неочевидного) факта можно найти, например, в книжке В. И. Арнольда «Лекции об уравнениях с частными производными» (Фазис, 1997, с. 68—70). Одновременно там доказывается пропорциональность изгибающей (и растягивающей) мембрану силы лапласиану Δu функции u (где $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$), причём

$$\iint\limits_M (\nabla u)^2\,dx\,dy = -\iint\limits_M u\Delta u\,dx\,dy,$$

если $u = 0$ на границе области M.

Оператор Δ, переводящий функцию u в Δu, выражается (в декартовых координатах x_i в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$) формулой

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}. \qquad (*)$$

Для других систем координат в том же евклидовом пространстве формула другая. Например, для полярных координат (r, φ) на плоскости ($x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$) оператор Лапласа функции u вычисляется по формуле

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

На функции u на любом римановом многообразии этот оператор переносится так: $\Delta u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u$. Физический смысл этих формул — такой же, как в рассмотренном выше примере с интегралом Дирихле (где речь шла о растяжении площадей).

Враги физики определяют в математических учебниках оператор Лапласа формулой (*), делающей этот физический объект релятивистски бессмысленным (зависящим не только от функции, к которой применяется оператор, но и от выбора системы координат). Напротив, операторы div, grad, rot, Δ зависят не от системы координат, а только от римановой метрики.