В. И. Арнольд

Геометрия
комплексных чисел, кватернионов и спинов

Издание второе, стереотипное

Москва
Издательство МЦНМО
2009

УДК 514/515
ББК 22.1
А84

Аннотация

Комплексные числа описывают движения евклидовой плоскости, одному вращению трёхмерного пространства соответствует два кватерниона, различие которых (физики назвали это явление спином) связано со свойствами группы преобразований. «Вращения» электронов отличаются от вращений твёрдых тел именно различием спинов, играющих решающую роль при описании электронных оболочек атомов.

В брошюре, наряду с основными фактами классической теории комплексных чисел и кватернионов, рассказаны некоторые новые результаты и гипотезы. Например, комплексной версией тетраэдра оказывается октаэдр, а гипотеза, что кватернионная его версия — икосаэдр, не доказана.

Текст брошюры представляет собой дополненную обработку записи лекции, прочитанной В. И. Арнольдом для школьников 9—11 классов 17 ноября 2002 года на Малом мехмате МГУ.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой: школьников старших классов, студентов, учителей ...

Арнольд Владимир Игоревич

Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов

Редактор *В. В. Трушков*. Техн. редактор *В. М. Гуровиц*.
Запись и расшифровка лекции: *Р. И. Богданов*, *М. Р. Богданов*.

Лицензия ИД №01335 от 24/III 2000 г. Подписано к печати 15.12.2008 г.
Формат 60 × 90 $^1/_{16}$. Физ. печ. л. 2,50. Усл. печ. л. 2,50. Тираж 1000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241–74–83.

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6.

ISBN 978-5-94057-462-0

Теории комплексных чисел, кватернионов и спинов относятся к небольшому числу наиболее фундаментальных частей геометрии, имеющих наиболее важные приложения в физике. Описываемое ниже геометрическое построение теории комплексных чисел французы приписали Аргану, хотя за семь лет до Аргана его опубликовал датский математик Вессель (который, впрочем, исходил скорее из будущих инженерных приложений, например, к ещё не построенной тогда теории уравнений Максвелла и переменного тока).

Комплексные числа

Рассмотрим на евклидовой плоскости систему ортонормированных координат.

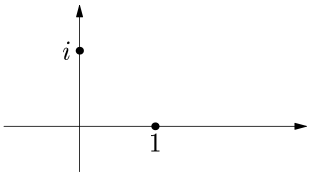

Рис. 1. Вещественные базисные векторы на плоскости комплексных чисел.

Базисные векторы обозначим через 1 по одной оси, i по другой оси (от слова «imaginary», т.е. мнимый). Точка плоскости представляется в виде $a + b \cdot i$ (единицу при a не пишем):

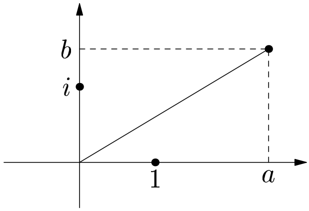

Рис. 2. Вещественная и мнимая часть комплексного числа.

Векторы на плоскости можно складывать:

$$\begin{array}{ccccc} z_1 & = & a_1 & + & b_1 \cdot i \\ z_2 & = & a_2 & + & b_2 \cdot i \\ \hline \multicolumn{5}{c}{z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i} \end{array}$$

Кроме сложения комплексных чисел, определим их умножение. Таблица умножения:

$$1 \cdot 1 = 1, \quad 1 \cdot i = i = i \cdot 1.$$

Самое главное начинается при умножении i на i:

$$i \cdot i = -1.$$

Число i называют *мнимым*, так как не существует вещественного числа a, для которого выполнялось бы равенство

$$a^2 = -1.$$

Произведение двух любых комплексных чисел определяется по закону дистрибутивности:

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Иными словами, умножая a_1 на a_2 и b_1 на b_2, получаем вещественную часть произведения (их разность), а умножая a_1 на b_2 и b_1 на a_2 — мнимую часть (сумму этих двух произведений). Определение умножения закончено.

Замечание. Все свойства умножения (коммутативность: $z_1 z_2 = z_2 z_1$; ассоциативность: $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$; дистрибутивность по отношению к сложению: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$) выполняются очевидным образом.

С алгебраической точки зрения теория комплексных чисел этим исчерпывается.

Движения плоскости

Комплексные числа — математический аппарат для описания движений плоскости. Чтобы в этом убедиться, мы введём еще дополнительное

Определение. Комплексное число

$$\overline{z} = a - b \cdot i$$

называется *комплексно сопряжённым* к числу $z = a + b \cdot i$.

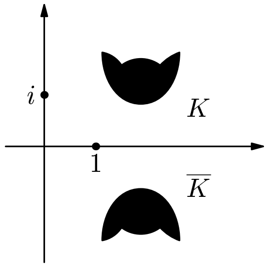

Рис. 3. Комплексное сопряжение кошки K.

Геометрически переход от z к $\overline{z}$ — это отражение относительно оси $O1$.

Теорема. *Сопряжённое число к сумме двух комплексных чисел равно сумме чисел, сопряжённых к слагаемым*:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2.$$

Теорема. *Сопряжённое число к произведению двух комплексных чисел равно произведению чисел, сопряжённых к множителям*:

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2.$$

Определение. Произведение комплексного числа на сопряжённое ему число называется *квадратом модуля* комплексного числа:

$$|z|^2 = z\overline{z}.$$

Модуль комплексного числа — действительное неотрицательное число.

Квадрат модуля не меняется при сопряжении:

$$\overline{z\overline{z}} = \overline{z}z = z\overline{z},$$

поэтому он является действительным числом. Кроме того, $|z|^2 = z\overline{z} = a^2 + b^2 \geqslant 0$, поэтому комплексное число z имеет модуль — тот квадратный корень из $a^2 + b^2$, который тоже действительное неотрицательное число.

Определение. *Аргумент* α не равного нулю комплексного числа равен углу поворота от положительной полуоси $O1$ в сторону положительной мнимой полуоси Oi до направления комплексного числа.

Замечание. Если $|z| = 1$, то

$$a = \cos\alpha, \quad b = \sin\alpha.$$

Те, кто не знаком с функциями синус и косинус, могут считать это замечание их определением.

Применим теперь комплексные числа для изучения движений евклидовой плоскости. Рассмотрим комплексное число $w \in \mathbb{C}$. Рассмотрим преобразование «умножение на комплексное число z», переводящее каждую точку w в точку zw, где $|z| = 1$, $\arg z = \alpha$.

Теорема. *Преобразование умножения на комплексное число с модулем единица является поворотом плоскости* $\{w\}$.

Доказательство. Рассмотрим комплексное число w. Сосчитаем модуль комплексного числа, в которое переходит w при нашем преобразовании:

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = (z\overline{z}) \cdot (w\overline{w}) = w\overline{w} = |w|^2.$$

Следовательно, любой вектор переходит в вектор такой же длины. Кроме того, расстояние между концами векторов также сохраняется:

$$|zw_1 - zw_2| = |z(w_1 - w_2)| = |w_1 - w_2|.$$

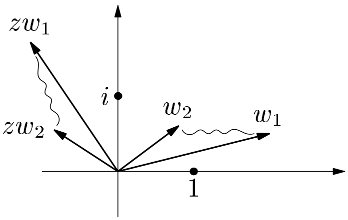

Рис. 4. Операция умножения на комплексное число с модулем единица.

Таким образом, преобразование умножения на комплексное число с модулем единица сохраняет длины.

Важная деталь: это преобразование сохраняет ориентацию. □

Задача. Вращение плоскости $\{w\}$ по часовой стрелке переходит при нашем преобразовании во вращение по часовой стрелке (т. е. в ту же сторону, что и исходное).

Отступление про ориентацию. Для определения ориентации нужна формула, которую от студентов зачастую скрывают, — формула площади параллелограмма. Пусть на евклидовой плоскости с ортонормированными координатами $\{(X, Y)\}$ имеется параллелограмм. Первый вектор, задающий параллелограмм, обозначим через $A = (x_1, y_1)$, второй — через $B = (x_2, y_2)$.

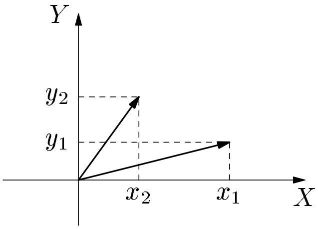

Рис. 5. Ориентация плоскости парой векторов.

Теорема. *Площадь $S(A, B)$ параллелограмма, порожденного векторами A и B, является линейной функцией от вектора A :*

$$S(A_1 + A_2, B) = S(A_1, B) + S(A_2, B).$$

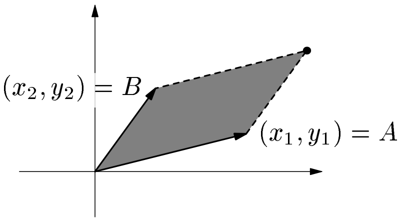

Рис. 6. Параллелограмм, порождённый парой векторов A и B.

Площадь надо считать со знаком «плюс», если поворот от A к B — в направлении вращения от первой координатной полуоси ко второй (на нашем рисунке — «против часовой стрелки»). Соответственно, со знаком «минус», если поворот от A к B — в противоположную сторону. Линейность зависимости площади от первого вектора означает также, что

$$S(kA, B) = kS(A, B).$$

Эти два простых факта содержат в скрытом виде всю «теорию определителей».

Возьмем базис $e = (1,0)$, $f = (0,1)$. Тогда наши векторы $A = A_1$ и $B = A_2$ можно представить в виде

$$A_1 = x_1 e + y_1 f, \quad A_2 = x_2 e + y_2 f.$$

Вычисляем площадь $S(A_1, A_2)$. Вследствие линейности получаем сумму четырёх слагаемых

$$S(A_1, A_2) = x_1 x_2 S(e,e) + x_1 y_2 S(e,f) + y_1 x_2 S(f,e) + y_1 y_2 S(f,f).$$

Здесь $S(e,e) = 0$, потому что параллелограмм, натянутый на пару (e,e), является вырожденным. По этой же самой причине $S(f,f) = 0$. Далее заметим, что $S(e,f) = 1$; но $S(f,e) = -1$, так как направление вращения от f к e — в обратную сторону. Следовательно, вся площадь равна

$$S(A_1, A_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Это число называется *определителем* приведённой ниже квадратной таблицы из четырёх компонент наших векторов, называемой *матрицей* параллелограмма:

$$S(A_1, A_2) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Мы обсуждаем вопрос: сохраняется ли при умножении на z ориентация? Надо взять на плоскости $\{w\}$ основной параллелограмм и посмотреть, куда он переходит. Если площадь образа положительна, то ориентация сохраняется, а если площадь образа отрицательна, то ориентация основного (а значит, и любого) параллелограмма меняется. Образы векторов e и f суть

$$ze = z = a + bi, \quad zf = zi = -b + ai.$$

Следовательно, матрица параллелограмма-образа имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы положителен (при $z \neq 0$), так как

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 - (-b) \cdot b = a^2 + b^2 \geqslant 0.$$

Следовательно, умножение на ненулевое комплексное число z сохраняет ориентацию плоскости умножаемых чисел.

Исследуем, на какой угол поворачивается вектор w при его умножении на z? Возьмём простейший вектор и посчитаем, на какой угол он повернется при нашем преобразовании.

Замечание. Алгебраисты считают простейшим числом число 0, но нам оно не подходит, мы возьмём в качестве простейшего число $w = 1$. Тогда умножение на z переведёт его в $zw = z = a + bi$.

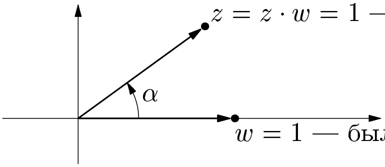

Рис. 7. Поворот вектора w при умножении на число z.

Из этого следует, что наше преобразование поворачивает вектор $w = 1$ на угол $\alpha = \arg z$.

Следствие. *Умножение на комплексное число z, такое что $|z| = 1$, является поворотом плоскости на угол, равный* $\arg z$.

Теорема. *При умножении комплексных чисел их аргументы складываются:*

$$\arg(zw) = \arg z + \arg w.$$

Доказательство. Мы уже доказали, что вектор $w = 1$ при умножении на z поворачивается на угол α. Но поскольку умножение на z есть поворот, то на такой же угол поворачивается и любой вектор w. Введём обозначение $\arg w = \beta$. Тогда число zw имеет аргументом $\alpha + \beta$, т. е. $\arg(zw) = \arg w + \alpha$. □

Это приводит к тригонометрическим тождествам, которые иначе невозможно понять. Пусть $z = a + bi$, $w = c + di$, $|z| = 1$, $|w| = 1$. Тогда

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Поскольку $\arg z = \alpha$, то $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$. Точно так же, поскольку $\arg w = \beta$, то $c = \cos\beta$, $d = \sin\beta$. Поэтому получаем для вещественных и мнимых частей произведения zw выражения

$$\cos(\alpha + \beta) = ac - bd = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha + \beta) = ad + bc = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta.$$

Формула умножения комплексных чисел легко запоминается и не путается ни с чем другим. А тригонометрических формул в ней содержится очень много, что делает из них излюбленный экзаменаторами вопрос на приемных экзаменах.

Теория вращений и движений евклидовой плоскости исчерпывается приведёнными формулами.

Задача. Докажите, что *при любом натуральном* n

$$\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$$

(эта формула называется *формулой Муавра*, так как её открыл гораздо раньше совсем другой человек).

Пример. Из этой формулы следует (путём раскрытия скобок в биноме правой части), что и $\cos(n\varphi)$, и $\sin(n\varphi)$ — вещественные многочлены с целыми коэффициентами от переменных $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$. Или, иными словами, *тригонометрические многочлены* (линейные комбинации синусов и косинусов кратных углов) *можно рассматривать как ограничения обычных многочленов от двух переменных* (x *и* y) *на окружность* ($x^2 + y^2 = 1$).

В частности, очень часто полезны формулы

$$\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi, \qquad \sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$\cos(3\varphi) = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi, \quad \sin(3\varphi) = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi.$$

Поскольку косинус — чётная функция, а синус — нечётная функция от φ, то $\cos(n\varphi)$ можно представить в виде многочлена от одного лишь аргумента $x = \cos\varphi$ (заменив везде $\sin^2\varphi$ на $1 - \cos^2\varphi$). Эти замечательные многочлены от одной переменной называются многочленами Чебышева, они обладают многими полезными свойствами («наименее уклоняются от нуля», доставляют «фигуры Лиссажу» на экране осциллографа* и т. д.). Простейшие из этих многочленов переписываются в других обозначениях следующим образом:

$$\mathcal{F}_1(x) = x, \quad \mathcal{F}_2(x) = 2x^2 - 1, \quad \mathcal{F}_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad \ldots$$

Однако, с самого начала возник вопрос: кроме вращений и движений плоскости $\mathbb{R}^2$ существуют вращения и движения пространства $\mathbb{R}^3$. Как

---

* См., например, *В. И. Арнольд*, Математические методы классической механики (М.: Эдиториал УРСС, 2000).