

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В СИСТЕМЕ ТЕЛ С УЧЁТОМ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Богатов Егор Михайлович

Проведённые исследования

Доказано существование и единственность слабого решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = f$ и полулинейного бигармонического уравнения вида $\Delta^2 u + g(u) = f$ на стратифицированном множестве Ω , составленном из конечного числа многообразий малой размерности, "правильно" примыкающих друг к другу ([1,2]). Лапласиан на Ω есть $div(grad u)$, причём дивергенция здесь определяется (см.[3]), как плотность потока векторного поля по мере, порождённой единичной плотностью на Ω .

Аналогичные результаты по разрешимости получены при рассмотрении задачи Коши для уравнений вида $\Delta^2 u + u_{tt} = f$ и эллиптических неравенств для бигармонического оператора на Ω ([4,5]).

Установлена также близость низкочастотной части спектра частот собственных колебаний прямоугольной свободно опёртой пластины и аппроксимирующей её правильной треугольной решётки стержней [6]. Основной результат работы сформулирован в виде следующей теоремы

Теорема. Пусть $0 < \lambda_h^1 < \lambda_h^2 < \dots < L$ - начальный отрезок спектра частот колебаний решетки стержней; $0 < \Lambda^1 < \Lambda^2 < \dots < L$ - начальный отрезок спектра частот колебаний аппроксимируемой пластины. Тогда для любого, достаточно малого h $|\lambda_i^h - \Lambda_i| \leq Ch^2$.

Следующая часть исследований посвящена математическим задачам теплофизики в неоднородной среде.

Была рассмотрена плоская нестационарная задача радиационно-кондуктивного теплообмена в конечной двухфазной среде в черном приближении. При этом газообразная часть среды считалась прозрачной для излучения, а расположение компонент связности твёрдой фазы носило периодический характер. Эти компоненты имели вид протяжённых цилиндрических тел (прутков) с достаточно малым диаметром, так что конвективной компонентой теплообмена можно было пренебречь. Начально-краевая задача, описывающая высокотемпературный нагрев в сечении произвольного прутка H_{ij} , взаимодействующего с соседними прутками, (в черном приближении), имела вид

$$(c\rho)(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_x (\lambda(u) \nabla_x u), \quad (x, t) \in H_{ij} \times (0, T) \quad (1)$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_M + h(u(x, t)) = \sum_{k,l} \int_{\partial H_{i+k, j+l}} h(u(\xi, t)) \varphi(x, \xi) ds_\xi \quad \text{на внутренних границах,} \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_M = \int_\gamma h(u(\xi, t)) \varphi(x, \xi) ds_\xi - h(u(x, t)) + h(u_c) \cdot \int_{\bar{\gamma}} \varphi(x, \eta) ds_\eta \quad (3)$$

на "вырезах" внешней границы,

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_M = h(u_c) - h(u(x, t)) \quad \text{на внешнем периметре,} \quad (4)$$

$$u(x, 0) = u^0(x). \quad (5)$$

Здесь $u = u(x, t)$ - искомая температура, $u_c = u_c(t)$ - температура внешней среды;
 c, ρ , и λ - коэффициенты удельной теплоемкости, плотности и теплопроводности металла соответственно;

$h(u) = \sigma u^4$ – плотность потока теплового излучения по закону Стефана-Больцмана (σ – постоянная Стефана-Больцмана);

$\partial H_{i+k, j+l}$ - прямолинейная часть границы соседнего шестиугольника, видимая из точки x ; сумма в правой части (2) состоит из двух слагаемых;

γ - видимая из точки x сторона соседнего 6-угольника; $\bar{\gamma}$ - искусственная граница выреза, получаемая соединением вершин углов соседних 6-угольников, образующих вырез;

ν - внешняя нормаль к $\partial H_{i+k, j+l}$;

ds_x, ds_ξ, ds_η - элементы длин соответствующих участков интегрирования;

$\varphi(x, \xi), \varphi(x, \eta)$ - содержательные части углового коэффициента излучения (см. [7]):

$$\varphi(x, \xi) = \frac{(\nu(\xi), x - \xi)(\nu(x), \xi - x)}{2|x - \xi|^3}.$$

На основе методики А.А. Амосова [8], по которой искомая функция (температура связи) – предполагалась кусочно-постоянной в каждый момент времени, было построено полудискретное приближение к описанной задаче [9]

$$\bar{c}_{ij} \frac{dU_{ij}}{dt} = d\Delta^d h_{ij}, \quad x_{ij} \in \varpi \quad (6)$$

где U_{ij} - среднее значение температуры в каждом 6-угольнике; ϖ - правильная треугольная сетка, образованная серединами H_{ij} ; $\bar{c}_{ij} = \frac{3}{4}c(U_{ij})\rho(U_{ij})$; $h_{ij} = h(U_{ij})$; $d = 2a$, а Δ^d - следующая разностная аппроксимация оператора Лапласа на 7-точечном шаблоне

$$\Delta^d h_{ij} = \frac{(h_{i-1, j} + h_{i+1, j} + h_{i-1/2, j+1} + h_{i+1/2, j-1} + h_{i-1/2, j-1} + h_{i+1/2, j+1}) - 6h_{ij}}{4a^2\sqrt{3}}.$$

Множитель $\frac{3}{4}$ в выражении для \bar{c}_{ij} имеет смысл “коэффициента заполненности” среды. Он вычисляется как отношение площади H_{ij} к площади описанного вокруг H_{ij} шестиугольника (см. центр на рис.1).

Система (6) дополнялась граничными и начальными условиями

$$u_{ij} = u_c(t), \quad x_{ij} \in \Sigma \quad (7)$$

$$u_{ij}(0) = u_{ij}^0 = \frac{2}{3a^2\sqrt{3}} \int_{H_{ij}} u^0(x) dx, \quad (8)$$

где Σ - сеточная граница ϖ , соответствующая пунктирной линии на рис.1.

Результаты вычислительного эксперимента, проведённые в рамках подготовки дипломных работ А.В. Сушко и С.А. Гришиной по специальности "Прикладная математика"¹ дали основание

¹защита состоялась в Старооскольском технологическом институте (филиале МИСиС) 19.06.2009

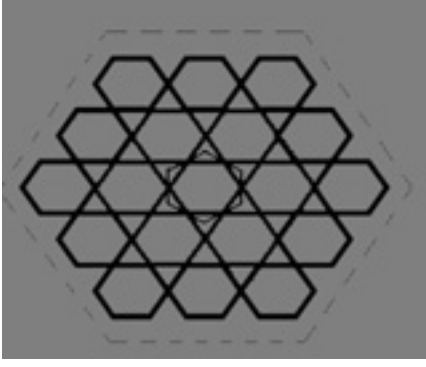


Рис. 1:

полагать, что решения полудискретной нелинейной задачи (6)-(8) будут являться хорошими приближениями к средним значениям температуры в сечении шестигранников H_{ij} .

Аналогичные приближения были построены для задач нагрева связки прутков, имеющей фракталоподобное сечение [10], а также для задач граничного управления нагревом связки [11].

Проект будущих исследований

Рассмотрим процесс переноса тепла в сечении Ω протяжённой, предварительно напряжённой связки чёрных цилиндрических тел при высокотемпературном боковом нагреве, считая, что эти тела плотно упакованы, изотропны и имеют выпуклое сечение с кусочно-гладкой границей. Данный процесс описывается следующей системой дифференциальных уравнений с начальными краевыми условиями, записанной на основе [8],[12],[13]

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \gamma T_c \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T), \quad (x, t) \in \Omega_{km} \times (0, \Theta) \quad (9)$$

$$\operatorname{div} \hat{\sigma} = \gamma \nabla T \quad (x, t) \in \Omega_{km} \times (0, \Theta), \quad (10)$$

$$\left(k \frac{\partial T}{\partial \vec{\nu}} + h(T) \right) (\bar{x}, t) = \sum_{q,r} \int_{\partial \Omega'_{qr}} h(T(\xi, t)) \varphi(\xi, \bar{x}) dl_{\xi} \quad (11)$$

$$(\bar{x}, t) \in \partial \Omega_{km} \times (0, \Theta) \quad \forall \{k, l\} : \partial \Omega_{km} \cap \partial \Omega = \emptyset$$

$$\left(k \frac{\partial T}{\partial \vec{\nu}} + h(T) \right) (\bar{x}, t) = h(T_c)(\bar{x}, t) + \sum_{q,r} \int_{\partial \Omega'_{qr}} h(T(\xi, t)) \varphi(\xi, \bar{x}) dl_{\xi}, \quad (12)$$

$$(\bar{x}, t) \in \partial \Omega_{km} \times (0, \Theta) \quad \forall \{k, l\} : \partial \Omega_{km} \cap \partial \Omega \neq \emptyset,$$

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = \gamma (T - T_c) \cdot n_i, \quad (x, t) \in \partial \Omega_{km} \times (0, \Theta) \quad (13)$$

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad x \in \Omega_{km}; \quad (14)$$

$$\sigma_{ij}(x, 0) = \sigma_{ij}^0, \quad x \in \Omega_{km}. \quad (15)$$

Здесь Ω_{km} - сечение выбранного тела, $\Omega = \bigcup \Omega_{km}$; $T(x, t)$ - искомая температура, $x = (x_1, x_2)$ - эйлеровы координаты; T_0 - начальная температура; $i = 1, 2, j = 1, 2$; k - коэффициент теплопроводности; λ, μ - постоянные Ламе,

α - температурный коэффициент линейного расширения;

$\vec{\nu} = \{n_1, n_2\}$ - вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega_{km}$; $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha$;

$\partial\Omega'_{qr}$ - части границ соседних с Ω_{km} границ компонент, видимых из точки \bar{x} ;

$T_c = Const > 0$ - температура внешней среды; $\vec{u} = \{u_1, u_2\}$ - искомый вектор перемещений,

$u_i = u_i(x, t)$; $\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)$ - компоненты тензора напряжений $\hat{\sigma}$;

σ_{ij}^0 - компоненты тензора начальных напряжений (заданы); $\kappa_0 = const$; $h(T) = \kappa_0 |T|^3 \cdot T$;

$\partial\Omega$ - часть границы Ω , контактирующая с внешней средой.

Предполагается, что мера пересечения $\Omega_{km} \cap \Omega_{qr}$ для любых $k \neq q, m \neq r$ равна нулю.

Заметим, что условие (15) может быть задано также в другом (эквивалентном) виде

$$u_i(x, 0) = u_i^0, \quad x \in \Omega_{km}. \quad (16)$$

Для исследования разрешимости описанной задачи будет использован энергетический подход [14]. На его основе, на **первом** этапе, будет доказано существование и единственность слабого решения нелинейной задачи (9)-(14),(16).

На **втором** этапе будет рассмотрено так называемое "серое" приближение.

Обозначим через ε степень черноты поверхности тел. Эта величина указывает на то, какая часть пришедшей энергии излучения J поглощается поверхностью. Оставшаяся непоглощённой энергия излучения, равная $(1 - \varepsilon)J$, поверхностью рассеивается. Аналогом (11),(12) в данном случае (см.[15]) будет являться

$$\left(k \frac{\partial T}{\partial \nu} + h(T) \right) (\bar{x}, t) = \varepsilon J(\bar{x}), \quad (\bar{x}, t) \in \partial\Omega_{km} \times (0, \Theta) \quad (17)$$

Функция $J(\bar{x})$ отвечает суммарной интенсивности излучения, приходящего в точку $\bar{x} \in \partial\Omega_{km}$.

Будем считать, что излучение, поглощение и рассеяние поверхности тел не зависят от направления распространения излучения. В этом случае J удовлетворяет интегральному уравнению

$$J(\bar{x}) = K((1 - \varepsilon)J(\bar{x})) + K(\varepsilon h(T))(\bar{x}) + J_c(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \partial\Omega_{km} \quad (18)$$

где K - интегральный оператор, определяемый формулой

$$K(w(\bar{x})) = \sum_{q,r} \int_{\partial\Omega'_{qr}} w(\xi) \varphi(\bar{x}, \xi) ds_\xi.$$

Первые два слагаемых в правой части (18) характеризуют интенсивность излучения, складывающегося из отражённого и испущенного излучения границ соседних тел, видимых из точки \bar{x} .

Функция $J_c(\bar{x})$ отвечает интенсивности приходящего извне излучения:

$$J_c(\bar{x}) = \begin{cases} (1 - K(1)) h(T_c), & \bar{x} \in \partial\Omega \\ 0, & \bar{x} \notin \partial\Omega \end{cases}.$$

Таким образом, для того, чтобы задать условие (17) на границе тела, необходимо сначала решить интегральное уравнение (18). Уравнения термоупругости (9)-(10), а также граничные

и начальные условия при этом не меняются.

Главным результатом этого этапа будет доказательство существования и единственности слабого решения задачи (9)-(10), (17)-(18), (13)-(15).

На **третьем**, заключительном этапе будет доказано существование и единственность слабых решений рассмотренных на первом и втором этапе задач при условии отказа от линеаризации в уравнении (9). Этому будет соответствовать (см. [16]) замена постоянного множителя T_c на величину T . Кроме того, здесь же будет рассмотрен случай, когда теплофизические характеристики упругих тел зависят от температуры. Доказательство разрешимости здесь предполагается методами, изложенными в [17], [18].

Отметим, что описанные в данном разделе задачи возникают при моделировании ряда металлургических процессов, но до настоящего времени практически не исследовались.

Преподавательский опыт и педагогические планы

Годы работы	Место работы	Должность
1997-1998	АОНО "Институт менеджмента, маркетинга и финансов"	Преподаватель
1998-1999	Воронежский госуниверситет	Преподаватель
1999-2000	Воронежская гос. архитектурно-строительная академия	Ассистент
2000-2002	Старооскольский технолог. институт (филиал МИСиС)	Старший преподаватель
2002 - н.в.	Старооскольский технолог. институт (филиал МИСиС)	Доцент

Руководжу дипломированием по специальности "Прикладная математика" с 2002-го года. Осуществляю подготовку аспирантов с 2008-го года.

В ближайшие годы планирую продолжить работу на кафедре высшей математики в Старооскольском технологическом институте (филиале МИСиС) на должности доцента.