Глава 9
Пьяный вандал

Уильям Роуэн Гамильтон[1] был величайшим математиком из всех, когда-либо рожденных Ирландией. Он появился на свет, когда часы отбивали полночь с 3 на 4 августа 1805 года, и впоследствии так и не смог окончательно решить, какой же из дней считать днем своего рождения. По большей части он склонялся к 3-му, но на его надгробии указана дата “4 августа”, потому что ближе к концу жизни он перешел на эту дату по сентиментальным причинам. Он был блестящим лингвистом, математическим гением и алкоголиком. Он задался целью изобрести алгебру в размерности три, но вместо этого во вспышке озарения, которое вылилось в акт вандализма по отношению к мосту, реализовал то, к чему стремился, в размерности четыре.

1 Ничего не поделаешь; однофамильцем нашего Гамильтона является, например, Л. Хэмилтон — британский обладатель чемпионского титула в гонках класса “Формула 1”, — но традиционное написание есть традиционное написание (плюс к тому в физике и математике укоренилось немало производных от имени Гамильтона, например, “гамильтониан”). Других примеров традиционного русского написания в этой книге немало. Скажем, все “простые” французы по имени Charles — Шарли, но короли, носящие *то же* имя, — Карлы; *Исаак* Ньютон, но *Айзек* Азимов и т. д. *(Примеч. перев.)*

Он навсегда изменил взгляды человечества на алгебру, пространство и время.

Уильям родился в богатой семье — он был третьим сыном Арчибальда Гамильтона, юриста, голова которого была устроена подходящим для бизнеса образом. У Уильяма была также сестра по имени Элиза. Отец любил пропустить пару-тройку стаканчиков, поэтому некоторое время с ним приятно было находиться в одной компании, однако ближе к вечеру дело поворачивалось обратной стороной медали. Арчибальд ясно выражал свои мысли, был умен и религиозен, и его младший сын унаследовал все его отличительные черты, включая пристрастие к алкоголю. Мать Уильяма Сара Хаттон в умственном отношении не уступала мужу — она происходила из семьи, несшей на себе знаки интеллектуального отличия, однако ее влияние на маленького Уильяма ограничилось по большей части передачей ему своих генов — в трехлетнем возрасте мальчик был отдан в обучение к дяде Джеймсу. Джеймс был викарием и превосходным лингвистом, и его интересы определили основные направления образования Уильяма.

Результаты последовали впечатляющие, хотя и на довольно узком поприще. В пятилетнем возрасте Уильям свободно владел греческим, латынью и древнееврейским. К восьми годам он говорил по-французски и по-итальянски. Два года спустя к списку добавились арабский и санскрит; позднее — персидский, сирийский, хинди, малайский, маратхи и бенгальский. Попытка овладеть китайским провалилась из-за отсутствия подходящих текстов. Джеймс жаловался, что ему “стоило немалых денег поддерживать его из Лондона, но, похоже, деньги были потрачены не зря”. Математик и квазиисторик Эрик Темпл Белл (“квази”, потому что он никогда не позволял неудобному факту испортить хорошую историю) вопрошал: “Для *чего* все это было нужно?”

Однако естественным наукам и математике повезло. Уильям, совсем уже было собравшийся посвятить свою жизнь изучению как можно большего числа существующих в мире языков, познакомился с американским вундеркиндом по имени Зира Колберн. Это был один из тех странных людей, чья голова работает как карманный калькулятор; он обладал способностью быстро и точно выполнять вычисления. Если бы вы спросили Колберна, чему равен кубический корень из 1 860 867, он ответил бы — 123, не моргнув глазом.

Такие способности — не то же самое, что склонность к математике, подобно тому как способность к грамотному письму не сделает из вас хорошего романиста. За исключением Гаусса, в записных книжках и рукописях которого остались многочисленные объемные вычисления, очень мало кто из великих математиков был выдающимся вычислителем. Большинство были просто толковыми вычислителями, каковыми в то время и требовалось быть, но в среднем не более выдающимися, чем обычный квалифицированный бухгалтер. Даже в наши дни компьютеры не полностью вытеснили вычисления ручкой на бумаге или в уме; часто можно получить хорошее представление о математической задаче, делая вычисления руками и следя за тем, как на бумаге выстраиваются символы. Но, разумеется, при наличии хорошей программы (по большей части созданной математиками) кто угодно сможет после часа тренировки проводить вычисления на уровне, которому возможности Колберна и в подметки не годятся.

И не думайте, что нечто подобное сделает вас хоть сколько-нибудь похожим на Гаусса.

Колберн не мог толком объяснить, какие приемы он использует, хотя и понимал, что немалую роль здесь играет память. Его познакомили с Гамильтоном в надежде, что юный гений прольет свет на эти таинственные приемы. Уильям так и сделал и даже предложил некоторые усовершенствования. Ко времени отъезда Колберна Гамильтон наконец нашел предмет, достойный потрясающей мощи своего ума.

К семнадцати годам Гамильтон прочитал целый ряд трудов, написанных корифеями математики, и знал достаточно математической астрономии, чтобы вычислять затмения. Он по-прежнему проводил больше времени за “классическими” штудиями, чем за математикой, но все же именно математика стала его настоящей страстью. Вскоре он начал делать первые открытия. Гаусс открыл построение правильного 17-угольника, когда ему было 19 лет, а молодой Гамильтон совершил равно беспрецедентный прорыв, сформулировав аналогию — выражаясь математически, тождество — между механикой и оптикой, наукой о свете. Он впервые упомянул о своих идеях по этому поводу в зашифрованном письме к сестре Элизе, но нам вполне достоверно известно о характере этих идей из его последующего письма кузену Артуру.

Это было удивительное открытие. Механика — наука о движущихся телах: пушечные ядра летят по дуге параболы, маятники регулярным образом раскачиваются из стороны в сторону, планеты движутся по эллипсам вокруг Солнца. Оптика же представляет собой геометрию световых лучей, отражение и преломление, радуги, призмы и телескопические линзы. Связь между ними оказалась неожиданной; в то, что они представляют собой *одно и то же*, поверить было невозможно.

Но тем не менее так оно и было. И это непосредственно привело к формализму, который в наши дни используется в математике и математической физике (не только в механике и оптике, но и в квантовой теории), — так называемому формализму гамильтоновых систем. Их основное свойство состоит в том, что уравнения движения механической системы выводятся из единой величины — полной энергии, ныне называемой *гамильтонианом* системы. Получающиеся уравнения оперируют не только с положениями различных частей системы, но и с тем, сколь быстро они движутся, — с *импульсом* системы. И еще одно прекрасное свойство этих уравнений состоит в том, что они не зависят от выбора координат. Красота является истиной, по крайней мере в математике. А здесь физика одновременно и прекрасна, и истинна.

Гамильтону повезло больше, чем Абелю или Галуа, в том отношении, что на его необычные способности обратили внимание в раннем детстве. Поэтому вполне естественно, что в 1823 году он поступил в ведущий ирландский университет — дублинский Тринити Колледж. Равным образом неудивительно, что он шел первым в списке из сотни кандидатов. Во время учебы в Тринити он получил все возможные награды. И, что еще важнее, он закончил первый том своего основополагающего труда по оптике.

Весной 1825 года Гамильтон открыл для себя притяжение прекрасного пола, представшего перед ним в лице Кэтрин Дизни. Наверное, он поступил не слишком мудро, ограничив свои знаки внимания написанием стихов, потому что его потенциальная возлюбленная недолго думая вышла замуж за священника старше ее на пятнадцать лет, который был способен на несколько менее литературный подход к порядочным девицам. Сердце Гамильтона было разбито; несмотря на свою твердую приверженность религиозным заповедям, он подумывал о том, чтобы утопиться, то есть совершить смертный грех. Однако здравомыслие одержало верх, и он излил свою разочарованную душу еще в одной поэме.

Гамильтон любил поэзию, и круг его друзей включал самых видных литераторов. Уильям Вордсворт стал его близким другом; он также часто встречался с Сэмюелем Тейлором Колриджем и другими писателями и поэтами. Вордсворт оказал Гамильтону ценнейшую услугу, деликатно намекнув ему, что его таланты лежат *не* в сфере поэзии:

> “Вы засыпали меня градом ваших стихов, которые я прочитал с великим удовольствием... Однако же нас не оставляет опасение, что подобная стезя может отвратить вас от научного пу-

ти... Я не решаюсь вам советовать, но не найдет ли поэтическая часть вашей натуры более благодарного для себя поля в области прозы...”

Гамильтон ответил в том смысле, что его истинной поэзией была математика, и мудро переключился на научное поприще. В 1827 году, еще в бытность его студентом, Гамильтона единогласно избрали профессором астрономии в Тринити после того, как занимавший эту должность Джон Бринкли подал в отставку, а точнее, стал епископом Клойна. Гамильтон начал сразу с громкого успеха, опубликовав свою книгу по оптике — предмету, важному для астрономии, поскольку оптика лежит в основании устройства большинства астрономических инструментов.

Связь с механикой там присутствовала лишь в зачаточной форме. Основной фокус книги, если можно так выразиться, заключался в геометрии световых лучей — как они изменяют направление при отражении в зеркале или как преломляются в линзе. “Геометрическая оптика” позднее уступила место “волновой оптике”, в которой свет рассматривается как волны. Волны обладают целым набором дополнительных свойств, самое заметное из которых — дифракция. Интерференция волн может приводить к размытию краев изображения и даже к эффекту, который выглядит как огибание светом угла (фокус, невозможный для лучей).

Геометрия световых лучей не была новым предметом; ее интенсивно изучали математики и до этого, начиная с Ферма и даже с греческого философа Аристотеля. Гамильтон сделал в оптике нечто подобное прославленному достижению Лежандра в механике: он избавился от геометрии и заменил ее алгеброй и анализом. А именно — заменил основанные на рисунках чисто геометрические рассуждения на абстрактные вычисления.

Это было существенным шагом вперед, поскольку неточные картинки, тем самым, заменялись строгим анализом. Позднее математики предприняли энергичные усилия, чтобы пройти путь, намеченный Гамильтоном, в обратном направлении и снова ввести в обиход наглядные образы. Но формальный алгебраический подход стал к тому моменту неотъемлемой частью математического мышления и мог оставаться естественным спутником более наглядных аргументов. Колесо моды сделало полный оборот, но на более высоком уровне, подобно спиральной лестнице.

Великим вкладом Гамильтона в оптику было объединение. Все огромное многообразие известных результатов он свел к одному фундаментальному методу. Вместо системы световых лучей он ввел одну-единственную величину, “характеристическую функцию” системы. С ее помощью любая оптическая конфигурация представлялась одним уравнением. Более того, это уравнение можно было решить единообразным способом, что давало полное описание всей системы лучей и ее поведения. Метод Гамильтона основывался на одном фундаментальном принципе: световые лучи, проходящие через любую систему зеркал, призм и линз, выбирают путь, распространение по которому до цели занимает наименьшее время.

Ферма еще ранее обнаружил некоторые специальные случаи этого принципа, назвав его принципом наименьшего времени. Простейший пример, позволяющий объяснить его работу, — это отражение света от плоского зеркала. Левый рисунок показывает, как световой луч, выходя из одной точки и отражаясь от зеркала, достигает второй точки. Одним из великих открытий на заре оптики был закон отражения, который гласит, что две части светового луча составляют с зеркалом равные углы[1].

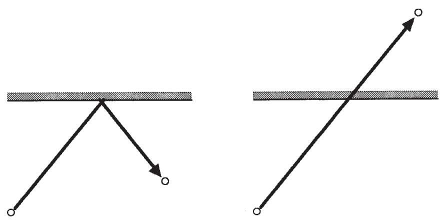
1 Читатель мог встречать следующую распространенную формулировку этого утверждения: угол падения равен углу отражения. *(Примеч. перев.)*

Ферма придумал изящный прием: отразить в зеркале второй участок луча, а заодно и вторую точку, как показано на правом рисунке. Благодаря Эвклиду условие “равных углов” — это то же самое, что утверждение, что в этой “отраженной” картине путь от первой точки до второй является прямой линией. Но Эвклид доказал тот знаменитый факт, что прямая линия есть кратчайшее расстояние между двумя точками. Поскольку скорость света в воздухе постоянна, кратчайшее расстояние означает то же самое, что наименьшее время.

Возвращаясь к геометрии на левом рисунке, мы видим, что выполнено то же самое утверждение. Таким образом, условие равных углов логически эквивалентно тому факту, что световой луч выбирает путь с наименьшим временем распространения из первой точки во вторую при условии, что по дороге надо отразиться от зеркала.

Связанный с этим принцип — закон преломления Снеллиуса — говорит о том, как “ломается” луч при переходе из воздуха в воду и вообще из одной среды в другую. Этот закон можно вывести подобным же образом, если учесть, что свет распространяется в воде медленнее, чем в воздухе. Гамильтон пошел еще дальше, утверждая, что тот же принцип минимизации времени применим ко всем оптическим системам, и воплотив эту мысль в едином математическом объекте — характеристической функции.

Использованная здесь математика впечатляла, но в руках Гамильтона она привела к немедленной экспериментальной отда-



Как принцип наименьшего времени приводит к закону отражения.

че. Гамильтон заметил, что из его метода следовало существование "конического преломления", когда один луч света при попадании на подходящий кристалл выходит из него в виде целого конуса лучей. В 1832 году это предсказание, неожиданное для всех, кто работал в оптике, получило прочное экспериментальное подтверждение, когда Хэмфри Ллойд использовал кристалл арагонита. На следующее утро Гамильтон проснулся знаменитым.

К 1830 году Гамильтон озаботился тем, чтобы обзавестись семьей; он подумывал жениться на Элен де Вер, умом которой, как он говорил Вордсворту, он восхищался. Ей он тоже писал письма в стихах и был готов уже сделать предложение, когда она заявила ему, что никогда не уедет из своей родной деревни Карра[1]. Он воспринял это как тактичный отказ — весьма вероятно, что обоснованно, поскольку через год она вышла за кого-то замуж и все же уехала.

В конце концов он женился на Элен Бейли — местной девушке, жившей неподалеку от обсерватории. Гамильтон описывал ее как "далеко не блестящую". Медовый месяц был ужасен: Гамильтон занимался оптикой, а Элен болела. В 1834 году у них родился сын Уильям Эдвин. Затем Элен уехала на бо́льшую часть года. Второй сын Арчибальд Хенри появился на свет в 1835-м, но брак уже трещал по швам.

В глазах потомства величайшим открытием Гамильтона была сформулированная им оптико-механическая аналогия. Но сам он до самой смерти — причем с все возрастающим упорством — отдавал пальму первенства вещи совершенного другого сорта — кватернионам.

Кватернионы представляют собой некоторую алгебраическую структуру, находящуюся в близком родстве с ком-

1 Curragh, графство Килдейр (Kildare, Chill Dara). *(Примеч. перев.)*

плексными числами. Гамильтон был убежден, что они содержат в себе ключ к глубочайшим областям физики, а на склоне жизни убедил себя, что в них содержится ключ буквально ко всему. История, похоже, не согласилась с этой оценкой, и в течение следующего столетия кватернионы медленно тускнели, пропадая из поля общественного интереса, превратившись в тихую заводь абстрактной алгебры без серьезных применений.

Совсем недавно, однако, кватернионы пережили возрождение. И даже если они никогда не займут того положения, которое прочил им Гамильтон, их чем дальше, тем больше рассматривают как значимый источник важных математических структур. Кватернионы оказались очень специальным явлением — как раз настолько специальным, насколько этого требуют современные физические теории.

Сразу после открытия кватернионы произвели мощный переворот в алгебре. Они нарушили одно из важных алгебраических правил. На протяжении периода в двадцать лет чуть ли не все правила алгебры нарушались одно за другим, что иногда приносило богатейшие плоды, но ничуть не реже приводило в бесплодные тупики. То, что математики середины 1850-х годов воспринимали как не подлежащие изменениям правила, оказалось просто набором удобных допущений, облегчавших жизнь алгебраистам, но не всегда отвечавших более глубоким потребностям самой математики.

В этом прекрасном новом "постгалуавском" мире алгебра уже не сводилась к простому использованию в уравнениях букв вместо чисел. Алгебра имела дело с глубокой структурой уравнений — не с числами, а с процессами, преобразованиями, симметриями. Эти радикальные перемены изменили лицо математики. Она стала более абстрактной, но одновременно и более общей, и более мощной. А также приобрела зачаровывающую, порой сверхъестественную красоту.

До того как болонские математики эпохи Возрождения задались вопросом о том, имеется ли смысл в квадратном корне из минус единицы, все появляющиеся в математике числа принадлежали одной системе. Даже сегодня, в качестве наследия исторической путаницы во взаимоотношениях математики и реальности, эта система известна как *вещественные* числа. Название не слишком удачное, потому что оно предполагает, что эти числа некоторым образом принадлежат к ткани вселенной, а не порождены человеком в попытке понять ее структуру. Но это не так. Эти числа не более вещественны, чем любые другие "числовые системы", созданные человеческим воображением за последние 150 лет. Правда, они имеют более непосредственное отношение к реальности, чем большинство новых систем. Они очень точно соответствуют идеализированному измерению.

Вещественное число по сути представляет собой десятичную дробь. Дело не в конкретной выбранной системе записи — которая создана просто для удобства вычислений с числами, — а в тех более глубоких свойствах, которые присущи десятичным дробям. Вещественные числа произошли от предшественников попроще, с меньшими амбициями. Сначала человечество тащилось по направлению к системе "натуральных чисел" 0, 1, 2, 3, 4 и так далее. Я сказал "тащилось", потому что на начальном этапе некоторые из этих чисел числами вовсе не считались. Было время, когда древние греки отказывались считать 2 числом; оно было слишком маленьким, чтобы демонстрировать "численность", типичную для других чисел. Числа тогда начинались с 3. В конце концов было осознано, что 2 — число в той же мере, что и 3, 4 или 5, но затем камнем преткновения оказалась единица. В самом деле, если кто-то говорит про себя, что у него имеется "некоторое число коров", а вы обнаруживаете, что у него одна-единственная корова, то не будет ли он повинен в вопиющем преувеличении? "Число", без сомнения, означало "множественность", в которой нет места единичности.

Но по мере развития систем обозначений стало кристально ясно, что единица — ровно в той же мере часть системы вычислений, что и ее старшие братья. Таким образом, единица стала числом — правда, специальным, очень маленьким. В некотором смысле оно оказалось самым важным из всех, поскольку именно там, в единице, числа начинались. Прибавлением друг к другу большого числа единиц можно получить все остальное — и в течение некоторого времени обозначения буквально выражали эту идею, например, число семь записывалось в виде семи черточек — как |||||||.

Много позднее индийские математики поняли, что есть даже более важное число, *предшествующее* единице. На самом деле числа начинались не там. Они начинались в нуле, который теперь изображается символом 0. Еще позднее оказалось полезным ввести в обиход отрицательные числа — числа, *меньшие чем* ничто. Таким образом, с присоединением отрицательных, человечество изобрело систему целых чисел: ..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ... Но этим дело не закончилось[1].

Проблема с целыми числами состоит в том, что они не позволяют представить целый ряд полезных величин. Фермер, продающий зерно, например, может пожелать указать количество пшеницы как нечто между 1 мешком и 2 мешками. Если это будет примерно посередине между этими двумя мерами, то желаемое количество мешков равно $1^1/_2$. Или несколько меньше — $1^1/_4$, или, наоборот, больше — $1^3/_4$. Таким образом (с использованием самых разнообразных систем для их обозначения) были изобретены дроби. Дроби интерполируют между целыми числами.

Достаточно сложные дроби могут интерполировать с исключительной точностью, в чем мы уже могли убедиться, рас-

1 Читателя может заинтересовать взгляд на излагаемый здесь ход событий как на “подложную историю чисел”, изложенный в книге Дж. Дербишира “Простая одержимость”, которая выйдет в издательстве Corpus. *(Примеч. перев.)*

сматривая вавилонскую арифметику. Крепла уверенность, что любую величину можно представить в виде дроби.

Но тут на сцену выходят Пифагор и носящая его имя теорема. Немедленное следствие этой теоремы состоит в том, что длина диагонали единичного квадрата представляет собой число, квадрат которого равен в точности 2. Иными словами, диагональ имеет длину, равную квадратному корню из 2. Такое число обязано существовать, поскольку каждый может нарисовать квадрат, а у него, разумеется, есть диагональ, а она, без сомнения, имеет длину. Но, как осознал на свою беду Гиппас, чем бы ни был квадратный корень из 2, он не может точно выражаться в виде дроби. Это число *иррациональное*. Таким образом, потребовалось еще больше чисел для заполнения невидимых дыр между всеми возможными дробями.

В конце концов этот процесс вроде бы достиг конечной остановки. Греки предпочитали числовым схемам геометрию, но в 1585 году Вильгельм Молчаливый[1] назначил фламандского математика и инженера Симона Стевина из Брюгге учителем своего сына Морица Оранского. Стевин занимал должности инспектора плотин, начальника снабжения армии, а также министра финансов. Эти должности, в особенности две последние, убедили его в важности ведения бухгалтерского учета, и он позаимствовал системы, использовавшиеся в итальянских конторах. В поисках такого способа представлять дроби, который соединял бы в себе гибкость индо-арабских позиционных обозначений и высокую точность вавилонских шестидесятеричных

1 Willem van Oranje (1533–1584) — принц Оранский, граф Нассауский, первый статхаудер Голландии и Зеландии, один из лидеров Нидерландской революции. *(Примеч. перев.)*

дробей, Стевин предложил аналог вавилонской системы, но с основанием 10 вместо основания 60, — то есть десятичные дроби.

Стевин опубликовал очерк, описывающий его новую систему обозначений. Он в достаточной мере осознавал проблемы маркетинга и включил утверждение, что его идеи успешно прошли “тщательные испытания людьми практической закалки, которые нашли их настолько полезными, что они добровольно отказались от своих собственных усовершенствований в пользу данного”. Далее он утверждал, что его десятичная система “учит нас, что все вычисления, которые встречаются при ведении бизнеса, можно выполнить в одних только целых числах, не прибегая к помощи дробей”. В обозначениях Стевина не использовалась современная десятичная запятая, но там было нечто близкое. Там, где мы пишем “3,1416”, Стевин писал бы 3 ⓪ 1 ① 4 ② 1 ③ 6 ④. Символ ⓪ указывал на целое число, ① — на десятые, ② — на сотые и т. д. По мере того как люди привыкли к этой системе, они перестали писать ①, ② и т. д., оставив только знак ⓪, который мутировал в десятичную запятую.

На самом деле с использованием десятичных дробей записать квадратный корень из двух нельзя — если только в ваши планы не входит продолжать эту запись без конца. Но равным образом нельзя записать в виде десятичной дроби и 1/3. Близким к 1/3 значением будет 0,33, но еще ближе 0,333, а сверх того лучше 0,3333 и так далее. Точное представление существует — тут мы употребим это слово новым для себя способом, — только если рассматривать бесконечную последовательность троек. Но если такое приемлемо, то можно в принципе точно записать и квадратный корень из двух. В том, как там устроены десятичные знаки, не видно никакого порядка, но, взяв достаточно большое количество этих знаков, можно получить число, квадрат которого настолько близок к числу 2, насколько пожелаете. Идея в том, что если взять *все* десятичные знаки, получится число, квадрат которого равен точно 2.

После принятия "бесконечных десятичных дробей" система вещественных чисел стала полной. В ней оказалось возможным представить любое число, которое может потребоваться бизнесмену или математику, с любой желаемой точностью. Всякое измерение, которое только можно себе вообразить, давало результат, выразимый десятичной дробью. Если требовалось записать отрицательные числа, десятичная система с легкостью справлялась с этой задачей. Нужды ни в каких числах какого-либо другого сорта не возникало. Не осталось никаких пробелов, которые надо было бы заполнить.

Если не считать ....

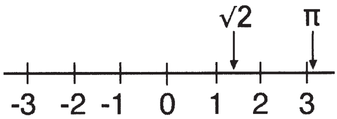
Те странные формулы Кардано для корней квадратного уравнения, казалось, пытались нам что-то сообщить, но что именно — оставалось крайне неясным. Если начать с совершенно, казалось бы, безобидного уравнения третьей степени — такого, где корень нам известен, — то формула не дает этот ответ в явном виде. Вместо этого она предлагает громоздкое предписание, включающее извлечение кубического корня из чего-то даже еще более громоздкого, и при этом требуется, казалось бы, невозможное — извлечение квадратного корня из отрицательного числа. Пифагорейцев ставил в тупик квадратный корень из двух, но квадратный корень из минус единицы казался еще более непостижимым.

На протяжении нескольких сотен лет возможность придания разумного смысла квадратному корню из минус единицы периодически то посещала коллективное математическое сознание, то покидала его. Никто не понимал, могут ли такие числа существовать. Постепенно, однако, зрело осознание, что если бы они существовали, то были бы исключительно полезны.

Первоначально такие “мнимые” величины использовались ровно для одной цели: указывать на задачи, не имеющие решения. Если вы желали найти число, квадрат которого равен минус единице, то формальное решение “квадратный корень из минус единицы” было мнимым — в смысле воображаемым, — поскольку такого решения не существовало. Не кто иной, как мыслитель Рене Декарт, именно так и утверждал. В 1637 году он проводил различие между “вещественными” числами и “мнимыми”, настаивая, что присутствие мнимых величин означает отсутствие решения. Ньютон говорил то же самое. Но оба эти светила не принимали во внимание сделанное столетиями раньше наблюдение Бомбелли о том, что иногда мнимые величины указывают на наличие решения, — но только сигнал, который они подают, нелегко расшифровать.

В 1673 году английский математик Джон Валлис — родившийся в Эшфорде, примерно в пятнадцати милях от моего родного города в графстве Кент — добился фантастического продвижения. Он обнаружил, что простой способ представления мнимых чисел — и даже “комплексных” чисел, которые соединяют в себе вещественные и мнимые — состоит в том, чтобы использовать точки на плоскости. Первым шагом является ныне вполне привычная концепция вещественной “числовой прямой” — прямой линии, простирающейся до бесконечности в обоих направлениях, с отметкой 0 посередине, направо от которой уходят вдаль положительные вещественные числа, а налево — отрицательные.

Каждое вещественное число можно поместить на числовую прямую. Каждый следующий десятичный знак требует деления единицы длины на десять, затем на сто, тысячу и т. д. равных частей, но это не проблема. Положение чисел, подобных $\sqrt{2}$, можно указать с любой желаемой степенью точности — в данном случае где-то между 1 и 2, немного слева от 1,5. Число π живет немного справа от 3, и т. д.

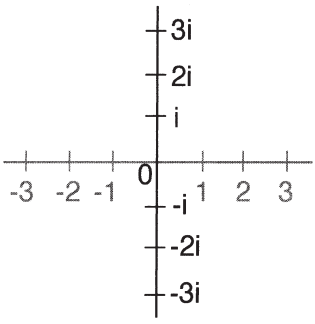


Вещественная числовая прямая.

Но куда же отправить $\sqrt{-1}$? Места на вещественной числовой прямой для этого числа нет. Это число ни положительно, ни отрицательно, поэтому ему не место ни справа, ни слева от точки 0.

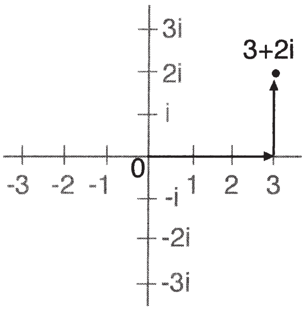
Валлис поместил его где-то еще. Он ввел вторую числовую прямую, чтобы разместить на ней мнимые числа, т. е. числа, кратные *i*,[1] и расположил ее под прямым углом к вещественной числовой прямой. Это был в буквальном смысле образец "широкого подхода к делу".

Две числовые прямые, вещественная и мнимая, должны пересекаться в точке 0. Совсем не сложно доказать, что если числа вообще имеют смысл, то 0 умножить на *i* должно равняться 0, так что начало отсчета на вещественной и мнимой прямых одно и то же.



Два экземпляра вещественной числовой прямой,
расположенные под прямым углом.

1 Здесь *i* обозначает $\sqrt{-1}$ (см. стр. 113). Под "кратными" понимаются числа вида *i*· (вещественное число). *(Примеч. перев.)*



Комплексная плоскость, согласно Валлису.

Комплексное число состоит из двух частей: одна вещественная, другая мнимая. Чтобы указать положение заданного числа на плоскости, Валлис предложил своим читателям отмерить вещественную часть вдоль горизонтальной “вещественной” прямой, а затем отмерить мнимую часть вдоль вертикального направления, то есть параллельно мнимой прямой.

Это предложение полностью решило вопрос о придании смысла мнимым и комплексным числам. Оно было простым, но эффективным — настоящей работой гения.

Оно было целиком и полностью проигнорировано.

Несмотря на отсутствие общественного признания, открытие Валлиса, должно быть, как-то просочилось в математическое сознание, поскольку математики бессознательно начали использовать образы, непосредственно связанные с основной идеей Валлиса: комплексные числа живут не на прямой, а на комплексной *плоскости*.

По мере того как математика становилась более разнообразной, математики переходили к вычислению все более сложных вещей. В 1702 году Иоганн Бернулли, решая некоторую задачу из анализа, столкнулся с проблемой вычисления логарифма комплексного числа. К 1712 году Бернулли и Лейбниц воевали по поводу следующего ключевого вопроса: чем является логарифм отрицательного числа? Если бы этот вопрос удалось решить, можно было бы найти логарифм любого комплексного числа, потому что логарифм квадратного корня из заданного числа равен просто половине его логарифма. Таким образом, логарифм числа *i* составляет половину логарифма числа –1. Но чему равен логарифм –1? Вопрос стоял просто. Лейбниц полагал, что логарифм числа –1 должен быть комплексным. Бернулли говорил, что вещественным. Бернулли основывал свое заключение на несложных выкладках из математического анализа; Лейбниц возражал, что ни сам метод, ни полученный ответ не имеют смысла. В 1749 году Эйлер разрешил это противоречие, всецело встав на сторону Лейбница. Бернулли, по его наблюдению, упустил кое-что из виду. Его выкладки из анализа носили такой характер, что ответ включал в себя добавление “произвольной постоянной”. Полностью сосредоточившись на комплексном анализе, Бернулли молчаливо предполагал, что эта постоянная равнялась нулю. А она нулю не равнялась. Она была мнимой. Это упущение объясняло расхождение между ответами Бернулли и Лейбница.

Темпы “комплексификации” математики нарастали. Все больше идей, появившихся при изучении вещественных чисел, распространялись на комплексные числа. В 1797 году норвежец по имени Каспар Вессель опубликовал метод представления комплексных чисел точками на плоскости.

Каспар происходил из семьи священника и был шестым из четырнадцати детей. В то время в самой Норвегии университетов не было, но она находилась в унии с Данией, так что в 1761 году он отправился в Копенгагенский университет. Он и его брат Оле изучали право, причем Оле, чтобы пополнить семейный бюджет, подрабатывал землемером. Позднее Каспар стал помощником Оле.

Работая землемером, Каспар изобрел способ представления геометрии на плоскости — в особенности линий и их направлений — в терминах комплексных чисел. В ретроспективе мы видим, что его идеи означали представление комплексных чисел в терминах геометрии на плоскости. В 1797 году он представил свою работу — первую и единственную свою научную статью по математике — Датской Королевской Академии.

Едва ли кто-нибудь из ведущих математиков читал по-датски, и работа влачила “непрочитанное существование”, пока через 100 лет ее не перевели на французский. Тем временем французский математик Жан-Робер Арган независимо предложил ту же идею и опубликовал ее в 1806 году. В 1811 году та же мысль, что комплексные числа можно рассматривать как точки на плоскости, — снова независимо — пришла в голову Гауссу. Названия “диаграмма Аргана”, “плоскость Весселя” и “Гауссова плоскость” стали входить в обиход. Представители различных наций склонялись к использованию различных способов выражения.

Завершающий шаг предпринял Гамильтон. В 1837 году, почти через триста лет после того, как из формул Кардано стала видна возможная польза от мнимых чисел, Гамильтон устранил геометрический элемент и свел комплексные числа к чистой алгебре. Его идея была проста; она неявно следовала из предложения Валлиса и в эквивалентной форме содержалась у Весселя, Аргана и Гаусса. Но никто из них не сделал ее явной.

Алгебраически, утверждал Гамильтон, точку на плоскости можно отождествить с парой вещественных чисел — ее координатами (x, y). Если посмотреть на диаграмму Валлиса (или Весселя, или Аргана, или Гаусса), то станет ясно, что x есть вещественная часть числа, а y — его мнимая часть. Комплексное число $x + iy$ “на самом деле” есть лишь пара (x, y) вещественных чисел. Можно даже выписать правила для сложения и умножения таких пар, причем основной шаг состоит в наблюдении, что поскольку число *i* соответствует паре (0, 1), произведение (0, 1) × (0, 1) должно равняться (–1, 0). По данному вопросу Гаусс также сообщает в письме к венгерскому геометру Вольфгангу Бойяи, что в точности та же мысль пришла ему в голову в 1831 году. Лис снова замел свои следы — причем опять никто ничего не заметил.

Задача решена. Комплексное число — это в точности пара вещественных чисел, оперировать которыми надо согласно списку простых правил. Поскольку пара вещественных чисел уже заведомо столь же "вещественна", сколь и одно вещественное число, вещественные и комплексные числа равным образом связаны с реальностью, а название "мнимые" только сбивает с толку.

Сегодняшние взгляды несколько отличаются от этого: сбивает с толку слово "вещественный". Как вещественные, так и мнимые числа равным образом представляют собой продукт человеческого воображения.

Реакцией на данное Гамильтоном решение задачи, стоявшей до этого в течение трех сотен лет, была полная тишина. Коль скоро математики уже включили понятие комплексных чисел в мощную последовательную теорию, страхи касательно существования комплексных чисел потеряли актуальность. Тем не менее использование пар чисел, как предлагал Гамильтон, оказалось очень важным. Хотя вопросу о комплексных числах перестал сопутствовать ажиотаж, идея о построении новых числовых систем из старых укоренилась в математическом сознании.

Комплексные числа оказались полезны не только в алгебре и основах анализа. Они позволили сформулировать мощный метод решения задач о потоке жидкости или тепла, о гравитации и звуке — почти в каждой области математической физики. Но у них было одно существенное ограничение: с их помощью эти задачи решались в двумерном пространстве, тогда как мы живем в трехмерном. Некоторые задачи, такие как задача о движениях мембраны барабана или о течении тонкого слоя жидкости, можно свести к размерности два, что совсем не так уж плохо. Но математиков все больше раздражало, что их методы, основанные на комплексных числах, не удавалось распространить с плоскости на трехмерное пространство.

Могли ли существовать еще не открытые расширения числовой системы на трехмерное пространство? Данная Гамильтоном формализация комплексных чисел как пары вещественных подсказывала подход к этой проблеме: постараться организовать числовую систему, основанную на *тройках* чисел (x, y, z). Проблема состояла в том, что до тех пор никто не работал с алгеброй, образованной тройками чисел. Гамильтон решил попробовать.

Сложение троек не составляло проблемы: подсказка со стороны комплексных чисел состоит в том, что надо просто складывать соответствующие координаты. Такого типа арифметика, ныне известная как векторное сложение, подчиняется весьма симпатичным правилам, и имеется только один разумный способ ее реализации.

Настоящей проблемой было умножение. Уже для комплексных чисел умножение устроено вовсе не как сложение: пары вещественных чисел *не* умножаются друг на друга путем раздельного перемножения первых и вторых компонент. Если вы все же захотите определить умножение таким образом, то произойдет масса неприятных вещей — но, главное, две фатальных неприятности.

Первая состоит в том, что больше не будет квадратного корня из минус единицы.

Вторая же состоит в том, что можно будет взять умножение ненулевых чисел и получить нуль. Такие “делители нуля” превращают в ад все обычные алгебраические методы, например методы решения уравнений.

Для комплексных чисел подобные неприятности преодолеваются за счет выбора менее очевидного правила умножения в соответствии с рецептом Гамильтона. Но когда он попытался сделать нечто подобное для троек чисел, он испытал страшное потрясение. Несмотря на все свои усилия, он не мог избежать некоторых фатальных дефектов. Получить квадратный корень из минус единицы удавалось, но только ценой появления делителей нуля. Избавиться от делителей нуля представлялось решительно невозможным, что бы он ни делал.

Если вам кажется, что все это звучит несколько в духе попыток решить уравнение пятой степени, то кое-что вы ухватили правильно. Когда многие способные математики пытаются сделать нечто, но терпят неудачу, вполне может оказаться, что задача не имеет решения. Если и есть что-то главное, чему научила нас математика, то это факт, что многие задачи не имеют решений. Нельзя найти дробь, квадрат которой равен 2. Нельзя разделить угол на три части, используя циркуль и линейку. Нельзя решить уравнение пятой степени в радикалах. Математика имеет свои пределы. Быть может, невозможно построить трехмерную алгебру, обладающую всеми хорошими свойствами, которых мы от нее хотим.

Если вы всерьез задумали разобраться, действительно ли дело обстоит таким образом, перед вами открывается программа исследований. Сначала надо указать свойства, которыми ваша трехмерная алгебра должна обладать. Потом следует проанализировать следствия этих свойств. Если из этого извлечь достаточное количество информации, то можно искать некие свойства, которые должна иметь данная алгебра, если она действительно существует, и причины, по которым она может не существовать.

Так, по крайней мере, обстояло бы дело в наши дни. Подход Гамильтона был не столь систематическим. Он молчаливо предполагал, что его алгебра должна иметь “все” разумные свойства, а потом внезапно понял, что с одним из них, возможно, придется расстаться. Более важно то, что он осознал, что алгебры размерности три в колоде нет. Самое близкое, что получалось, — это четыре. Четверки, а не тройки чисел.

Добавим еще два слова по поводу этих ускользающих алгебраических правил. Когда математики выполняют алгебраические вычисления, они организуют свои символы систематическим образом. Вспомним, что исходное арабское название “аль-джабр” означает “восстановление” — действие, про которое теперь мы сказали бы “перенесите слагаемое в другую часть уравнения с другим знаком”. Лишь в течение последних 150 лет математики озаботились составлением явных списков правил, стоящих за всякими подобными действиями, — списков, из которых все остальные хорошо известные правила получаются как логические следствия. Такой аксиоматический подход играет для алгебры роль, подобную той, которую Эвклид сыграл для геометрии, и математикам понадобилось всего две тысячи лет, чтобы овладеть этой идеей.

Чтобы было понятно, о чем мы говорим, можно сфокусироваться на трех из этих правил, которые все связаны с умножением. (Со сложением дело обстоит похожим образом, но проще; умножение — это как раз то место, где все начинает идти наперекосяк.) Дети, изучающие таблицу умножения, в конце концов замечают возможность сэкономить половину усилий. Не только трижды четыре дает двенадцать, но и четырежды три тоже. Если перемножить два числа, то результат не меняется от того, какое из чисел было взято первым. Этот факт называется законом коммутативности, и в символьной форме он говорит нам, что $ab = ba$ для любых чисел a и b. Это правило выполнено также в расширенной системе комплексных чисел. Это можно доказать, рассматривая формулы Гамильтона для умножения пар.

Тонким законом является закон ассоциативности, который гласит, что при перемножении трех чисел в одном и том же порядке не имеет значения, с какого умножения начать. Допустим, нам надо перемножить $2 \times 3 \times 5$; можно начать с умножения 2×3, что дает 6, а далее умножить 6 на 5. Альтернативным образом можно сначала перемножить 3×5, что есть 15, а далее умножить 2 на 15. Оба способа действий приводят к одному и тому же результату — числу 30. Закон ассоциативности утверждает, что так происходит всегда; в символьной форме он говорит нам, что $(ab)c = a(bc)$, где скобки показывают очередность, в которой надо выполнять умножение. Это свойство снова выполнено и для вещественных, и для комплексных чисел, и доказать это можно, используя формулы Гамильтона.

Последнее, очень полезное правило — назовем его законом деления, хотя в учебниках вы найдете его под именем "существование мультипликативного обратного" — утверждает, что всегда можно поделить любое число на любое ненулевое число. Имеются веские основания для запрета деления на нуль; основная причина состоит в том, что это действие редко бывает осмысленным.

Мы уже видели, что можно соорудить алгебру троек чисел, используя "очевидное" умножение. Эта система удовлетворяет законам коммутативности и ассоциативности. Но не закону деления.

Великий взлет мысли Гамильтона, произошедший после долгих часов бесплодных поисков и вычислений, привел к следующему осознанию: можно образовать новую числовую систему, в которой и закон ассоциативности, и закон деления выполнены, но необходимо пожертвовать законом коммутативности. Но даже тогда подобное нельзя сделать с тройками вещественных чисел. Надо использовать четверки. Нет "разумной" трехмерной алгебры, но имеется довольно приемлемая четырехмерная. Это единственная алгебра такого типа, и до идеала ей не хватает только одного — закона коммутативности.

Важно ли это? Ход мыслей Гамильтона был надолго заблокирован твердым убеждением в необходимости закона коммутативности. Все изменилось в одно мгновение, когда, чем-то внезапно вдохновленный, он понял, как перемножать четверки чисел. На календаре было 16 октября 1843 года. Гамильтон шел с женой по тропинке вдоль Королевского Канала, направляясь на собрание престижной Королевской Ирландской академии в Дублине. Его бессознательное, должно быть, кружило вокруг задачи о трехмерной алгебре, потому что внезапно его пронзило озарение. “Там и тогда я почувствовал гальванизирующий ток от приближающейся мысли, — писал он позднее в письме, — и искры, произведенные им, представляли собой *фундаментальные уравнения между i, j, k, причем в точности такие*, какие я с той поры всегда и использую”.

Гамильтон находился под таким впечатлением, что немедленно нацарапал формулы на каменной кладке моста Брумбридж. Мост сохранился до наших дней, но нацарапанное на нем — нет, хотя там и имеется памятная доска[1]. Формулы

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

также пережили своего создателя.

1 На массивной каменной основе моста, со стороны, обращенной к каналу, укреплена каменная плита со словами:
“Here as he walked by
on the 16th of October 1843
Sir William Rowen Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication
$i^2 = j^2 = k^2 = ij\,k = -1$
& Cut It On A Stone Of This Bridge”

Последняя строка читается не без некоторого труда из-за сколов на камне. Кладка моста весьма грубая, так что называть вандалом того, кто нацарапал на ней нечто осмысленное, можно лишь с довольно большой натяжкой. (*Примеч. перев.*)

Это очень симпатичные формулы, обладающие высокой симметрией. Но читателю, должно быть, не терпится спросить — при чем же здесь *четверки* чисел?

Комплексные числа можно записать как пары (x, y), хотя обычно их записывают в виде $x + iy$, где $i = \sqrt{-1}$. В том же духе числа, о которых говорил Гамильтон, можно записывать или в виде четверок (x, y, z, w), или как комбинацию $x + iy + jz + kw$. Формулы Гамильтона относятся ко второму способу обозначений; если же у вас формальное умонастроение, то вы, возможно, этой записи предпочтете представление в виде четверок чисел.

Гамильтон назвал свои новые числа кватернионами. Он доказал, что они подчиняются закону ассоциативности и — замечательным, как стало ясно позднее, образом — закону деления. Но не закону коммутативности. Из правил умножения кватернионов следует, что $ij = k$, но $ji = -k$.

Система кватернионов содержит экземпляр комплексных чисел — кватернионы вида $x + iy$. Из формул Гамильтона видно, что -1 имеет не просто два квадратных корня i и $-i$, а кроме того, еще и j, $-j$, k и $-k$. На самом деле в кватернионной системе имеется бесконечно много различных квадратных корней из минус единицы.

Таким образом, вместе с потерей закона коммутативности мы также потеряли правило, что квадратное уравнение имеет два решения. По счастью, ко времени изобретения кватернионов основное внимание в алгебре сместилось в сторону от решения уравнений. Преимущества кватернионов существенно перевесили их недостатки. К ним просто требовалось привыкнуть.

В 1845 году Томас Дизни заехал к Гамильтону вместе со своей дочерью Кэтрин — юношеским увлечением Уильяма. К тому моменту она успела потерять первого мужа и выйти замуж вторично. Встреча разбередила старую рану, и зависимость Гамильтона от алкоголя сделалась более серьезной. Один раз он напился и выставил себя таким полным дураком на научном обеде в Дублине, что после этого зарекся пить и в течение последующих двух лет пил только воду. Однако когда астроном Джордж Эйри начал посмеиваться по поводу его воздержания, Гамильтон принялся в ответ поглощать алкоголь в усиленных количествах. С того времени он стал хроническим алкоголиком.

Два его дяди скончались, а друг и коллега совершил самоубийство; затем Кэтрин принялась писать ему письма, что только усугубило его депрессию. Она быстро поняла, что ее действия не подобают респектабельной замужней женщине, и вяло попыталась покончить с собой, а затем разъехалась с мужем и перебралась к матери.

Гамильтон продолжал отправлять Кэтрин письма через ее родственников. В 1853 году она решила возобновить общение, послав ему небольшой подарок. Ответный шаг Гамильтона состоял в том, что он отправился к ней с визитом, захватив экземпляр своей книги о кватернионах. Две недели спустя она умерла. Гамильтон был убит горем. Его жизнь становилась все более и более беспорядочной; после его смерти, последовавшей в 1865 году (как полагали, от подагры, которой часто страдают тяжелые пьяницы), его математические статьи были найдены вперемешку с мусором и объедками.

Гамильтон был убежден в том, что кватернионы — это Святой Грааль алгебры и физики, истинное обобщение комплексных чисел на высшие размерности, а также ключ к геометрии и физике в пространстве. Разумеется, пространство имеет размерность три, тогда как кватернионы — четыре, но Гамильтон обратил внимание на естественную подсистему размерности три.

Это “мнимые” кватернионы вида $bi + cj + dk$. Геометрически символы i, j, k можно интерпретировать как вращения вокруг трех взаимно перпендикулярных пространственных осей, хотя и здесь есть тонкости: дело в том, что при этом приходится работать в такой геометрии, где полная окружность содержит 720°, а не 360°. Если оставить в стороне этот выверт, можно понять, почему Гамильтон считал кватернионы полезными для геометрии и физики.

Оставшиеся “вещественные” кватернионы вели себя в точности как вещественные числа. Их нельзя было выкинуть вовсе, потому что они имеют тенденцию возникать всякий раз, когда с кватернионами выполняются какие-либо алгебраические вычисления, даже если начать с мнимых кватернионов[1]. Если бы было возможным оставаться исключительно в области мнимых кватернионов, то существовала бы разумная трехмерная алгебра, и первоначальная задача Гамильтона увенчалась бы успехом. Четырехмерная система кватернионов была лучшей из возможных, а естественная трехмерная система, весьма аккуратно в них вложенная, вполне заменяла ту несуществующую чисто трехмерную алгебру.

Гамильтон посвятил остаток жизни кватернионам, развивая их математику и разрабатывая их приложения к физике. Несколько посвященных последователей воздавали хвалы. Они основали школу кватернионистов, а после смерти Гамильтона бразды правления перешли к Питеру Тейту в Эдинбурге и Бенджамину Пирсу в Гарварде.

Другие, однако, недолюбливали кватернионы — частью из-за их искусственности, но главным образом потому, что, по их мнению, нашли нечто получше. Наиболее значительными представителями лагеря несогласных были Герман Грассман из Пруссии и американец Джозайа Уиллард Гиббс, ны-

1 В самом деле, об этом ясно говорят формулы на стр. 237. *(Примеч. перев.)*

не общепризнанные создатели “векторной алгебры”. Оба они изобрели полезные типы алгебр в любом числе измерений. В их работах не было ограничений типа четырехмерности или же трехмерности подмножества мнимых кватернионов. Алгебраические свойства этих векторных систем были не столь изящны, как у Гамильтоновых кватернионов. Например, нельзя было делить один вектор на другой. Но Грассман и Гиббс отдавали предпочтение общим работоспособным концепциям, даже если в них отсутствовали некоторые из обычных свойств чисел. Пусть нельзя разделить один вектор на другой, ну и что?

Гамильтон же, сходя в могилу, верил, что кватернионы составляли его самый главный вклад в естественные науки и математику. На протяжении следующей сотни лет мало кто, за исключением Тейта и Пирса, с ним бы согласился, и кватернионы оставались позабытой тихой заводью викторианской алгебры. Если вам требовался пример бесплодной самодовлеющей математики, то кватернионы были пропуском в этот клуб. Даже в университетских курсах чистой математики кватернионы никогда не появлялись; их даже не показывали в качестве курьеза. Согласно Беллу, “глубочайшей трагедией Гамильтона были не алкоголь и не неудачный брак, а его упрямая вера в то, что кватернионы содержат в себе ключ к математике и физике вселенной. История показала, что Гамильтон трагически обманывал себя, когда продолжал утверждать: “Я по-прежнему определенно заявляю, что это открытие представляется мне настолько же важным для середины девятнадцатого столетия, насколько открытие флюксонов было важным для семнадцатого столетия”. Никогда еще великий математик столь отчаянно не ошибался”.

В самом деле?

Кватернионы, быть может, развивались не вполне тем способом, какой предначертал Гамильтон, но их значимость растет с каждым годом. Они стали абсолютно фундаментальными для математики, и мы также увидим, что кватернионы и их обобщения играют фундаментальную роль и в физике. Одержимость Гамильтона открыла широкую дорогу современной алгебре и математической физике.

Никогда еще квазиисторик столь отчаянно не ошибался.

Гамильтон, возможно, преувеличивал практическую роль кватернионов и выжимал из них фокусы, к которым они в действительности были малопригодны, но его вера в их важность начинает получать серьезные подтверждения. Кватернионы возымели странную привычку возникать в таких местах, где их появление менее всего ожидается. Одна из причин состоит в их единственности. Их можно охарактеризовать несколькими разумными и относительно простыми свойствами — некоторой выборкой из “законов арифметики”, опустив всего один важный закон, — и они составляют единственную математическую систему, обладающую этим списком свойств.

Это утверждение требует пояснений.

Единственная числовая система, с которой знакома большая часть населения нашей планеты, — это вещественные числа. Их можно складывать, вычитать, умножать и делить, причем результат всегда будет вещественным числом. Разумеется, деление на нуль не допускается, но помимо этого необходимого ограничения можно применять весь набор арифметических операций, никогда при этом не покидая систему вещественных чисел.

Математики называют такую систему *полем*. Имеется много других полей, таких как поле рациональных чисел и поле комплексных чисел, но поле вещественных чисел является специальным. Это единственное поле с еще двумя свойствами: оно упорядочено и полно.

“Упорядочение” означает, что числа выстраиваются в соответствии с линейным порядком. Вещественные числа расположены вдоль прямой линии — отрицательные слева, а положительные справа. Имеются и другие упорядоченные поля, например поле рациональных чисел, но в отличие от других упорядоченных полей вещественное поле является также полным. Это дополнительное свойство (полная формулировка которого носит довольно технический характер) ответственно за существование таких чисел, как $\sqrt{2}$ и π. По сути свойство полноты говорит нам, что бесконечные десятичные дроби имеют смысл.

Можно доказать, что вещественные числа составляют единственное полное упорядоченное поле. Этим и определяется их центральная роль в математике. Они дают единственный контекст, в котором можно выполнять арифметические операции, сравнение “больше чем”, а также основные операции анализа.

Комплексные числа представляют собой расширение вещественных за счет включения чисел нового типа — квадратного корня из минус единицы. Но цена за возможность извлекать квадратные корни из отрицательных чисел состоит в потере упорядочения. Комплексные числа являются полной системой, но они заселяют плоскость, а не выстраиваются в единую упорядоченную последовательность.

Плоскость двумерна, а 2 — конечное целое число. Комплексные числа — это единственное поле, которое содержит вещественные числа и имеет конечную размерность (и которое при этом отлично от самих вещественных чисел, имеющих размерность единица). Это говорит о том, что и комплексные числа тоже единственны. Для многих важных целей комплексные числа оказываются единственным средством, которое позволяет добиться желаемого. Их единственность делает их незаменимыми.

Кватернионы возникают при попытке расширить комплексные числа за счет увеличения размерности (оставляя ее, тем не менее, конечной) с сохранением при этом максимально возможного числа законов алгебры. Законы, которые мы хотим оставить, — это обычные свойства сложения и вычитания, большая часть свойств умножения и возможность деления на все, кроме нуля. На этот раз жертву приходится приносить более серьезную; это-то и доставило Гамильтону столько терзаний. Надо выкинуть закон коммутативности умножения. Этот брутальный факт надо просто принять — и двигаться дальше. Когда вы к нему привыкнете, вы зададитесь вопросом, а почему вообще вы ожидали, что закон коммутативности будет выполнен во всех случаях, а одновременно начнете воспринимать тот факт, что он выполнен для комплексных чисел, как небольшое чудо.

Любая система с таким набором свойств, неважно, коммутативная или нет, называется *алгеброй с делением*.

Вещественные числа и комплексные числа — тоже алгебры с делением, потому что мы не настаиваем на отказе от коммутативности умножения, мы просто не требуем выполнения этого свойства. Каждое поле является алгеброй с делением. Но некоторые алгебры с делением не являются полями, и первыми из таких объектов были открыты кватернионы. В 1898 году Адольф Гурвиц доказал, что система кватернионов также единственна. Кватернионы являются единственной конечномерной алгеброй с делением, которая содержит вещественные числа и не совпадает с вещественными или комплексными числами.

Здесь просматривается любопытная закономерность. Размерности вещественных чисел, комплексных чисел и кватернионов равны 1, 2 и 4. Это подозрительно похоже на начало последовательности степеней двойки. Естественным продолжением были бы 8, 16, 32 и т. д.

Имеются ли интересные алгебраические системы в этих размерностях?

И да и нет. Но нам придется немного подождать, чтобы узнать почему, поскольку история симметрии вступает здесь в новую фазу: связь с дифференциальными уравнениями, представляющими собой наиболее широко используемую модель физического мира, и язык, на котором сформулировано большинство физических законов природы.

И снова наиболее глубокие аспекты теории сводятся к симметрии, правда, с новым поворотом сюжета. Теперь группы симметрии будут не конечными, а "непрерывными". Математике предстояло обогатиться одной из наиболее влиятельных программ исследований из всех когда-либо предпринятых.