Лекция 1. Природа классической физики

Где-то посреди стейнбековского пейзажа двое усталых путников присаживаются на обочине дороги. Ленни, почесывая бороду произносит: «Расскажи мне о законах физики, Джордж». Джордж мгновение смотрит в землю, потом бросает на Ленни взгляд поверх очков. «Ну, хорошо, Ленни, но только самый минимум».

Что такое классическая физика?

Термин *классическая физика* относится к той физике, которая существовала до появления квантовой механики. Классическая физика включает ньютоновские законы движения частиц, теорию электромагнитного поля Максвелла—Фарадея и общую теорию относительности Эйнштейна. Но это нечто большее, чем просто конкретные теории конкретных явлений; это ряд принципов и правил — базовая логика, подчиняющая себе все явления, для которых несущественна квантовая неопределенность. Этот свод общих правил называется *классической механикой*.

Задача классической механики состоит в предсказании будущего. Великий физик восемнадцатого века Пьер-Симон Лаплас выразил это в знаменитой цитате:

> Состояние Вселенной в данный момент можно рассматривать как следствие ее прошлого и как причину ее будущего. Мыслящее существо, которое в определенный момент знало бы все движущие силы природы и все положения всех объектов, из которых состоит мир, могло бы — если бы его разум был достаточно обширен для того, чтобы проанализировать все эти данные,— выразить одним уравнением движение и самых больших тел во Вселенной, и мельчайших атомов; для такого интеллекта не осталось бы никакой неопределенности и будущее открылось бы перед его взором точно так же, как и прошлое.

В классической физике, если вы знаете все о состоянии системы в некоторый определенный момент времени, а также знаете уравнения, определяющие изменения, происходящие в системе, вы можете предсказать будущее. Именно это мы имеем в виду, говоря, что классические законы физики *детерминистичны*.

Если это верно даже в том случае, когда прошлое и будущее меняются местами, то те же уравнения позволяют узнать все и о прошлом. Такие системы называются *обратимыми*.

Простые динамические системы и пространство состояний

Совокупность объектов (частиц, полей, волн — чего угодно) называется *системой*. Систему, представляющую собой всю Вселенную или настолько изолированную от всего остального, что она ведет себя так, будто ничего больше не существует, называют *замкнутой*.

УПРАЖНЕНИЕ 1

Поскольку это понятие крайне важно для теоретической физики, подумайте о том, что же такое замкнутая система, порассуждайте, существует ли она в действительности. Какие допущения неявно делаются в отношении замкнутой системы? Что такое открытая система?

Чтобы почувствовать, что такое детерминистичность и обратимость, мы начнем с очень простого примера замкнутых систем. Они значительно проще тех вещей, которые мы обычно изучаем в физике, но они подчиняются правилам, которые являются предельно упрощенным вариантом классической механики. Представьте себе абстрактный объект, имеющий лишь одно состояние. Можно, например, представить монету, приклеенную к столу, которая всегда показывает свой аверс. На жаргоне физиков совокупность всех состояний, занимаемых системой, называется *пространством состояний*. Это не обычное пространство; это математическое множество, элементы которого соответствуют возможным состояниям системы. В нашем случае пространство состояний содержит лишь одну точку, а именно Аверс (или просто А), поскольку система имеет лишь одно состояние. Предсказать будущее такой системы чрезвычайно просто: с ней никогда ничего не происходит, и результатом любого наблюдения всегда будет А.

Следующая по простоте система имеет пространство состояний, содержащее две точки; в этом случае у нас имеется один абстрактный объект и два возможных состояния. Можете представлять себе монету, выпадающую либо Аверсом, либо Реверсом (А или Р) — рис. 1.

Рис. 1. *Пространство двух состояний*

В классической механике считается, что системы изменяются плавно, без прыжков или перерывов. Такое поведение называют *непрерывным*. Очевидно, что из состояния Аверс нельзя непрерывно перейти в состояние Реверс. Движение в данном случае неизбежно происходит дискретными скачками. Так что давайте предположим, что время тоже идет дискретными шагами, которые нумеруются целыми числами. Мир с такой дискретной эволюцией можно назвать *стробоскопическим*.

Система, которая с ходом времени изменяется, называется *динамической*. Динамическая система — это не только пространство состояний. Она также включает *закон движения*, или *динамический закон*. Это правило, которое говорит, какое состояние станет следующим после текущего.

Один из простейших динамических законов состоит в том, что состояние в следующий момент будет таким же, как сейчас. Тогда в нашем примере возможны две истории: А А А А А А... и Р Р Р Р Р Р...

Другой динамический закон диктует, что каким бы ни было текущее состояние, следующее за ним будет противоположным. Можно нарисовать диаграммы, иллюстрирующие эти два закона. На рис. 2 показан первый закон, когда А всегда переходит в А и стрелка от Р идет к Р. И вновь будущее очень легко предсказать: если начать с А, система останется в состоянии А; если начать с Р, система останется в Р.

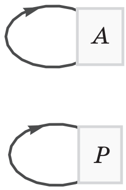

Рис. 2. *Динамический закон для системы с двумя состояниями*

Диаграмма для второго возможного закона представлена на рис. 3, где стрелки идут от А к Р и от Р к А. Будущее по-прежнему можно предсказывать. Например, если начать с А, то история будет: А Р А Р А Р А Р А Р… Если же начать с Р, получится история: Р А Р А Р А Р А…

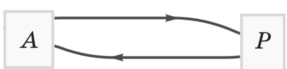

Рис. 3. *Другой динамический закон для системы с двумя состояниями*

Можно также записать эти динамические законы в виде формул. Переменные, описывающие систему, называются *степенями свободы*. У нашей монеты одна степень свободы, которую можно обозначить греческой буквой сигма: σ. Сигма имеет только два возможных значения: $\sigma = 1$ и $\sigma = -1$ соответственно для А и Р. Нам также нужен символ для обозначения времени. Когда рассматривается непрерывное течение времени, его принято обозначать t. Но у нас эволюция дискретна, и мы будем использовать n. Состояние в момент n обозначается выражением $\sigma(n)$, то есть значение σ в момент n.

Параметр n последовательно принимает значения всех натуральных чисел, начиная с 1.

Запишем уравнения эволюции для двух рассматриваемых законов. Первый из них гласит, что никаких изменений не происходит. Его уравнение —

$$\sigma(n + 1) = \sigma(n).$$

Другими словами, каким бы ни было значение σ на n-м шаге, то же значение будет и на следующем шаге.

Второе уравнение эволюции имеет вид

$$\sigma(n + 1) = -\sigma(n),$$

что означает перемену состояния на каждом шаге.

Поскольку в обоих случаях будущее поведение полностью детерминировано начальным состоянием, такие законы называются детерминистическими. Все фундаментальные законы классической механики — детерминистические.

Давайте ради интереса обобщим систему, увеличив число состояний. Вместо монеты можно использовать шестигранную игральную кость, имеющую шесть возможных состояний (рис. 4).

Теперь число возможных законов значительно возрастает и их становится нелегко описать словами и даже формулами. Проще всего рассмотреть диаграмму вроде приведенной на рис. 5. Из нее видно, что номер состояния, заданный в момент n, увеличивается на единицу в следующий момент $n + 1$. Это работает, пока мы не дойдем до состояния 6, где диаграмма предписывает вернуться в состояние 1 и повторить процесс. Такая бесконечно повторяющаяся схема называется *циклом*. Например, если начать с состояния 3, то история будет иметь вид: 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, ... Назовем эту схему динамическим законом 1.

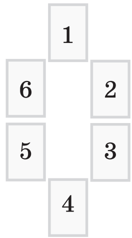

Рис. 4. *Система с шестью состояниями*

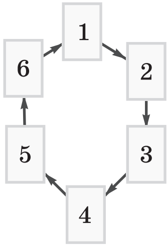

Рис. 5. *Динамический закон 1*

На рис. 6 показан другой закон — динамический закон 2. Он выглядит несколько более запутанным, но логически он идентичен предыдущему: в обоих случаях система бесконечно обходит в цикле все шесть возможных состояний. Если переименовать состояния, то динамический закон 2 станет точно таким же, как динамический закон 1.

Но не все законы логически эквивалентны. Рассмотрим, например, закон, показанный на рис. 7. Этот динамический закон 3 имеет два цикла. Если начать двигаться в одном из них, то невозможно попасть в другой. Тем не менее этот закон совершенно детерминистичен. С какого бы состояния вы ни начали, будущее остается предопределенным. Например, если начать с состояния 2, получится история: 2, 6, 1, 2, 6, 1, ... и состояние 5 никогда не будет достигнуто. Если же начать с состояния 5, то история будет иметь вид: 5, 3, 4, 5, 3, 4, ... и недостижимым окажется состояние 6.

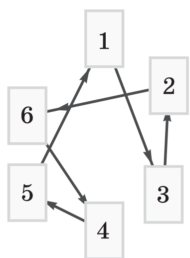

Рис. 6. *Динамический закон 2*

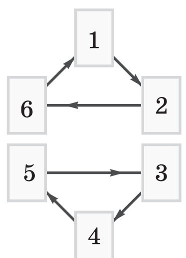

Рис. 7. *Динамический закон 3*

На рис. 8 показан динамический закон 4 с тремя циклами.

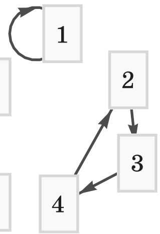

Рис. 8. *Динамический закон 4*

Понадобилось бы много времени, чтобы нарисовать все возможные динамические законы в системе с шестью состояниями.

УПРАЖНЕНИЕ 2

Сможете ли вы найти общий способ классификации законов, которые возможны в системе с шестью состояниями?

Правила, которые не разрешены: минус первый закон

Согласно правилам классической физики не все законы допустимы. Для динамического закона недостаточно быть детерминистичным; он еще должен быть обратимым.

Смысл *обратимости* (в контексте физики) можно описать несколькими способами. Самый простой из них — сказать, что можно развернуть все стрелки и получившийся в результате закон останется детерминистичным. Другой способ — сказать, что *закон детерминистичен как в прошлом, так и в будущем*. Вспомним замечание Лапласа о том, что «...для такого интеллекта не осталось бы никакой неопределенности, и будущее открылось бы перед его взором точно так же, как и прошлое». Можно ли придумать закон, который будет детерминистичным в будущем, но не в прошлом? Иными словами, можно ли привести пример необратимого закона? Да, можно. Рассмотрим рис. 9.

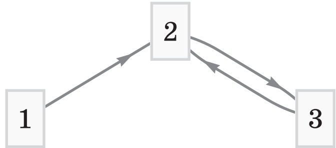

Рис. 9. *Необратимая система*

Закон, представленный на рис. 9, для любого состояния говорит, куда надо перейти дальше. Если вы находитесь в состоянии 1, то переходите в 2. Если в 2, то в 3. Если в 3, то в 2. Нет никакой неоднозначности относительно будущего. Иное дело — прошлое. Допустим, вы находитесь в состоянии 2. Где вы были в предыдущий момент? Вы могли прийти из состояния 3 или 1. Диаграмма об этом ничего не говорит. Хуже того, если рассмотреть обратный закон, то окажется, что нет состояния, которое вело бы к 1; состояние 1 не имеет прошлого. Закон, изображенный на рис. 9, *необратим*. Он дает пример ситуации, запрещенной принципами классической физики.

Обратите внимание, что если развернуть стрелки на рис. 9, то получится закон, представленный рис. 10, который не может однозначно сказать, как двигаться в будущем.

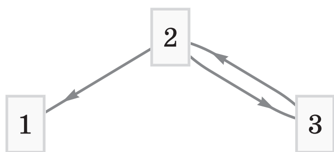

Рис. 10. *Система с недетерминированным будущим*

Есть очень простое правило, говорящее, когда диаграмма представляет детерминистичный и обратимый закон. Если у каждого состояния есть ровно одна стрелка, ведущая к нему, и ровно одна стрелка, выходящая из него, то это допустимый детерминистичный обратимый закон. Сформулируем это в виде слогана: *должна быть только одна стрелка, указывающая, откуда вы пришли, и только одна стрелка, указывающая, куда вам следует пойти.*

Правило, согласно которому динамические законы должны быть детерминистичными и обратимыми, настолько важно для классической физики, что в учебных курсах о нем порой попросту забывают упомянуть. У него даже нет названия. Можно назвать его первым законом, но, к сожалению, у нас уже есть два первых закона — первый закон Ньютона и первое начало термодинамики. Поэтому, чтобы обозначить приоритет, мы вынуждены будем отступить и обозначить этот принцип как *минус первый закон,* и это, несомненно, самый фундаментальный из всех физических законов — *закон сохранения информации*. Сохранение информации — это по сути правило, согласно которому у любого состояния есть одна входящая стрелка и одна исходящая. Тем самым гарантируется, что вы никогда не собьетесь с пути, откуда бы вы ни стартовали.

Динамические системы с бесконечным числом состояний

До сих пор во всех наших примерах пространство состояний имело конечное число элементов. Но нет причин, мешающих нам рассмотреть динамическую систему с бесконечным числом состояний. Представьте себе, например, линию с бесконечным числом отдельных точек вдоль нее, подобно железнодорожной линии с бесконечной последовательностью станций в обоих направлениях. Допустим теперь, что некий маркер может в соответствии с некоторым правилом прыгать от одной точки к другой. Для описания такой системы мы пометим все точки вдоль линии целыми числами подобно тому, как нумеровали состояния в рассмотренных ранее примерах. Поскольку мы уже использовали букву n для дискретных шагов во времени, давайте использовать заглавную N для отслеживания маршрута. История маркера будет представлять собой функцию $N(n)$, которая возвращает место N для каждого момента времени n. Короткий участок этого пространства состояний изображен на рис. 11.

Рис. 11. *Пространство состояний бесконечной системы*

Очень простой динамический закон для такой системы показан на рис. 12. Он состоит в сдвиге маркера на одну позицию в положительном направлении с каждым шагом по времени.

Рис. 12. *Динамический закон для бесконечной системы*

Это правило допустимо, поскольку у каждого состояния только одна входящая стрелка и одна исходящая. Такое правило нетрудно записать в форме уравнения:

$$N(n + 1) = N(n) + 1. \tag{1}$$

А вот другие возможные правила, но не все из них допустимые:

$$N(n + 1) = N(n) - 1, \tag{2}$$

$$N(n + 1) = N(n) + 2, \tag{3}$$

$$N(n + 1) = (N(n))^2, \tag{4}$$

$$N(n + 1) = -1^{N(n)}\, N(n). \tag{5}$$

УПРАЖНЕНИЕ 3

Определите, какие из динамических законов, заданных формулами (2)–(5), являются допустимыми.

По формуле (1), где бы ни началось движение, вы в конце концов доберетесь до любой точки, двигаясь либо в будущее, либо в прошлое. Можно сказать, что тут имеет место один бесконечный цикл. А вот по формуле (3), начав с нечетного значения N, вы никогда не попадете на четное, и наоборот. Поэтому мы говорим, что тут наличествуют два бесконечных цикла.

Можно также добавить к системе качественно иные состояния, создав с их участием дополнительные циклы, как показано на рис. 13.

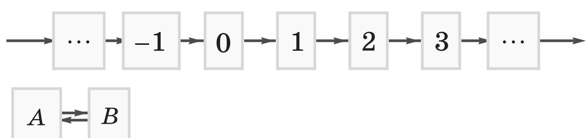

Рис. 13. *Разбиение бесконечного конфигурационного пространства на конечный и бесконечный циклы*

Если начать с числа, то мы по-прежнему будем двигаться по верхней линии, как и на рис. 12. Но если начать с буквы A или B, то мы закрутимся в цикле между ними. Так что возможна смешанная ситуация, когда в одних случаях мы обходим лишь некоторые состояния, а в других — движемся в бесконечность.

Циклы и законы сохранения

Когда пространство состояний разделено на несколько циклов, система остается в том цикле, в котором начала движение. Каждый цикл имеет свой собственный динамический закон, но все они — часть одного пространства состояний, поскольку описывают одну динамическую систему. Рассмотрим систему с тремя циклами. Каждое из состояний 1 и 2 представляет собой отдельный цикл, а состояния 3 и 4 принадлежат третьему (рис. 14).

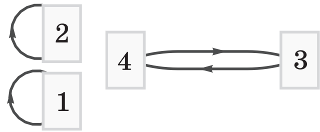

Рис. 14. *Разделение пространства состояний на циклы*

Всякий раз, когда динамический закон делит пространство состояний на подобные отдельные циклы, система «запоминает», с какого состояния мы стартовали. Подобная память называется *законом сохранения*; он говорит нам, что нечто остается неизменным с течением времени. Чтобы придать закону сохранения количественную форму, припишем каждому циклу численное значение, обозначаемое Q. В примере на рис. 15 три цикла обозначены как $Q = +1$, $Q = -1$ и $Q = 0$. Каким бы ни было значение Q, оно всегда остается неизменным, поскольку динамический закон не позволяет перепрыгивать с одного цикла на другой. Проще говоря, значение Q сохраняется.

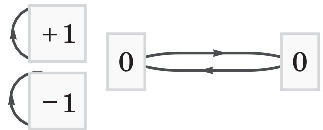

Рис. 15. *Приписывание циклам конкретных значений сохраняющейся величины*

В следующих главах мы столкнемся с проблемой непрерывного движения, в которой и время, и пространство состояний непрерывны. Для всех идей, которые мы обсуждали в применении к простым дискретным системам, в более реалистичных системах есть аналоги, но понадобится еще несколько лекций о том, как они устроены.

Пределы точности

Лаплас был чрезмерно оптимистичен относительно предсказуемости мира даже в рамках классической физики. Он, конечно, согласился бы с тем, что для предсказания будущего потребуется идеальное знание управляющих миром динамических законов и чудовищная вычислительная мощь, которую он характеризовал как разум, который «достаточно обширен для того, чтобы проанализировать все эти данные». Но есть еще один момент, который он, возможно, недооценил: способность знать начальные условия с почти идеальной точностью. Представьте себе игральную кость с миллионом граней, которые помечены символами, похожими на обычные цифры, но слегка различающимися, так что получается миллион различимых меток. Если знать динамический закон и суметь распознать начальную метку, то можно предсказать будущую историю кости. Но если титанический лапласовский интеллект страдает небольшими проблемами со зрением, из-за чего не различает очень похожие метки, то его предсказательная способность будет ограниченной.

В реальном мире все обстоит еще хуже; пространство состояний не просто необъятно по числу точек, оно непрерывно и бесконечно. Другими словами, оно размечено совокупностью вещественных чисел, вроде тех, что задают координаты частиц. Множество вещественных чисел столь плотно, что любое из них имеет бесконечное число сколь угодно близких соседей. Способность различать соседние значения этих чисел — это «разрешающая способность», характеризующая любой эксперимент, и для любого реального наблюдателя она ограничена. В большинстве случаев крошечные различия в начальных условиях (стартовом состоянии) приводят к значительным расхождениям в результатах. Это явление называют *хаосом*. Если система хаотическая (а таково большинство систем), то как бы велика ни была разрешающая способность, время, в течение которого система будет предсказуемой, ограничено. Идеальная предсказуемость недостижима просто потому, что мы ограничены в своей разрешающей способности.

Интерлюдия 1. Пространства, тригонометрия и векторы

«Где мы, Джордж?»

Джордж вытащил карту и разложил ее перед Ленни: «Мы вот здесь, Ленни, координаты: 36,60709° с. ш., –121,618652° з. д.»

«Да? А что такое координаты, Джордж?»

Координаты

Чтобы численно описывать точки, нам нужна система координат. Построение системы координат начинается с выбора точки пространства, которая будет ее *началом*. Иногда начало координат выбирают так, чтобы упростить уравнения. Например, теория, описывающая Солнечную систему, усложняется, если поместить начало координат не в районе центра Солнца. Строго говоря, выбор начала координат произволен — вы можете поместить его где угодно, но после этого надо держаться сделанного выбора.

Следующий шаг состоит в выборе трех перпендикулярных осей. И вновь их расположение произвольно при условии, что они взаимно перпендикулярны. Эти оси обычно называют x, y и z, но мы также можем обозначать их x_1, x_2 и x_3. Такая система осей называется *декартовой системой координат* и показана на рис. 1.

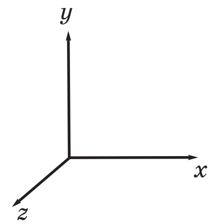

Рис. 1. *Трехмерная декартова система координат*

Мы хотим описать некоторую точку пространства; назовем ее P. Можно указать на нее, задав ее координаты x, y, z. Иными словами, мы задаем точку P с помощью упорядоченной тройки чисел (x, y, z) (рис. 2).

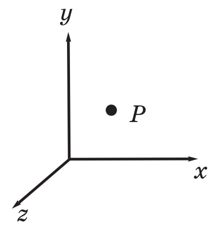

Рис. 2. *Точка в декартовом пространстве*

Координата x соответствует длине перпендикуляра, опущенного из точки P на плоскость, заданную условием $x = 0$ (рис. 3). Аналогичное правило верно и в отношении координат y и z. Поскольку координаты представляют собой длины, то измеряются они в единицах длины, например в метрах.

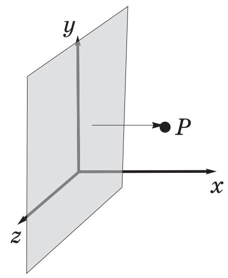

Рис. 3. *Плоскость, заданная условием $x = 0$, и расстояние до точки P вдоль оси x*

При изучении движения нам также нужно следить за временем. И вновь все отталкивается от начала отсчета, то есть нулевого момента времени. Можно выбрать за начало отсчета Большой взрыв, или дату рождения Христа, или просто момент начала эксперимента. Но выбрав его однажды, мы уже не должны его менять.

Далее нам необходимо зафиксировать направление времени. Обычно принято считать, что положительные моменты времени располагаются в будущем по отношению к началу отсчета, а отрицательные — в прошлом. Можно было считать и наоборот, но мы не станем.

Наконец, нам нужны единицы для измерения времени. Обычно физики используют секунды, но часы, наносекунды или годы тоже вполне подходят. Выбрав единицы и начало отсчета, мы можем пометить любой момент времени числом t.

В ньютоновской механике есть два неявных допущения относительно времени. Первое из них состоит в том, что время течет равномерно — интервал в 1 секунду имеет один и тот же смысл в любой момент времени. Например, одно и то же число секунд требуется грузу, чтобы упасть с Пизанской башни, — что во времена Галилея, что в наши дни. Секунда тогда и секунда сейчас — это одно и то же.

Второе допущение состоит в том, что можно сравнивать отсчеты времени, выполненные в разных местах. Это означает, что часы, расположенные в разных точках, могут быть синхронизированы. При таком предположении четыре координаты — x, y, z, t — определяют *систему отсчета*. Для любого события в системе отсчета можно указать значение каждой из координат.

Взяв функцию $f(t) = t^2$, можно нарисовать точки в системе координат. Мы используем одну ось для времени t, а другую — для значений функции $f(t)$ (рис. 4).

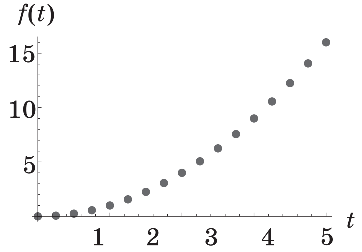

Рис. 4. *Точки для функции* $f(t) = t^2$

Мы также можем соединить эти точки кривой, чтобы заполнить промежутки между ними (рис. 5).

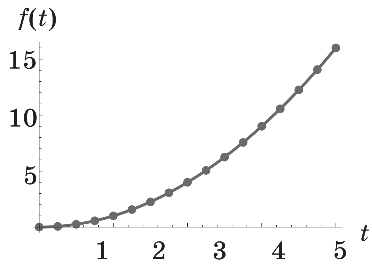

Рис. 5. *Соединение нарисованных точек кривой*

Этот способ визуализации функций называется графиком.

УПРАЖНЕНИЕ 1

Используя графический калькулятор или программу типа *Mathematica*, нарисуйте графики перечисленных функций. Если вам незнакомы тригонометрические функции, прочитайте следующий раздел.

$$f(t) = t^4 + 3t^3 - 12t^2 + t - 6,$$

$$g(x) = \sin x - \cos x,$$

$$\theta(\alpha) = e^{\alpha} + \alpha \ln \alpha,$$

$$x(t) = \sin^2 t - \cos t.$$

Тригонометрия

Если вы не изучали тригонометрию или знакомились с ней давно, вам стоит прочесть этот раздел.

В физике тригонометрия применяется постоянно; она повсюду. Поэтому нужно быть знакомым с идеями, обозначениями и методами, используемыми в тригонометрии. Начнем с того, что в физике обычно не используются градусы в качестве единицы измерения углов. Вместо них применяются *радианы*; принято, что в 360° содержится 2π радиан. Чтобы перевести угол из градусов в радианы, нужно разделить его на 180° и умножить на π, тогда: $90^\circ = \pi/2$ радиан, а $30^\circ = \pi/6$ радиан. Таким образом, один радиан — это примерно 57° (рис. 6).

Рис. 6. *Радиан — это угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности*

Тригонометрические функции определяются на основе свойств прямоугольных треугольников. На рис. 7

изображен прямоугольный треугольник с гипотенузой c, основанием b и высотой a. Греческой буквой θ (тета) обозначен угол, противолежащий высоте, а греческой буквой ϕ (фи) — угол, противолежащий основанию.

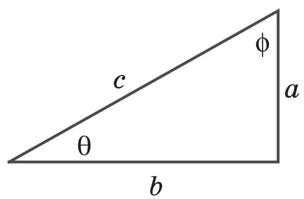

Рис. 7. *Прямоугольный треугольник с обозначением сторон и углов*

Определим функции синус (sin), косинус (cos) и тангенс (tg) как отношения сторон прямоугольного треугольника следующим образом:

$$\sin\theta = \frac{a}{c},$$

$$\cos\theta = \frac{b}{c},$$

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{a}{b} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Можно нарисовать графики этих функций, чтобы посмотреть, как они себя ведут (рис. 8–10).

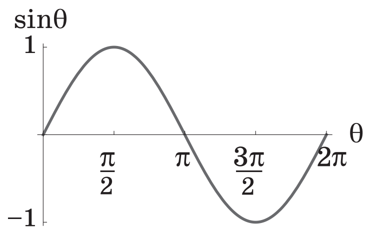

Рис. 8. *График функции синус*

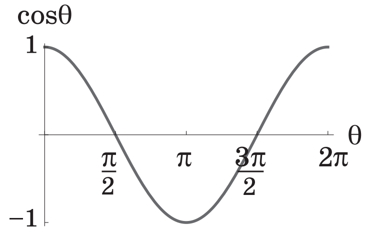

Рис. 9. *График функции косинус*

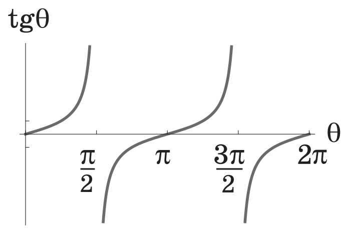

Рис. 10. *График функции тангенс*

Есть пара вещей, которые полезно знать о тригонометрических функциях. Во-первых, треугольник можно нарисовать внутри окружности с центром в начале декартовой системы координат, как показано на рис. 11.

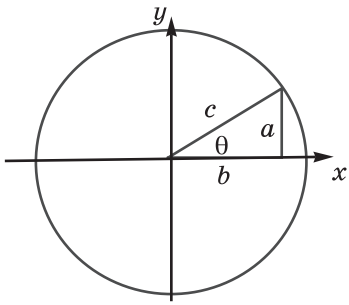

Рис. 11. *Прямоугольный треугольник, нарисованный в окружности*

Здесь линия, проведенная из центра к любой точке окружности, образует гипотенузу прямоугольного треугольника, а его высота и основание соответствуют координатам точки. Положение точки, таким образом, может быть задано двумя координатами x и y, где

$$x = c \cdot \cos \theta,$$

а

$$y = c \cdot \sin \theta.$$

Это очень полезная взаимосвязь между прямоугольными треугольниками и окружностями.

Во-вторых, допустим, что некоторый угол θ является суммой или разностью двух других углов, обозначаемых греческими буквами α (альфа) и β (бета), так что можно записать θ как $\alpha \pm \beta$. Тригонометрические функции от $\alpha \pm \beta$ выражаются через тригонометрические функции от α и от β следующим образом:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

И еще одно чрезвычайно полезное равенство:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1. \qquad (1)$$

(Отметим попутно, что для квадрата синуса принято использовать обозначение $\sin^2\theta = \sin\theta\sin\theta$.) На самом деле это уравнение — замаскированная теорема Пифагора. Если на рис. 11 принять, что радиус окружности равен 1, то стороны a и b будут синусом и косинусом θ, а гипотенуза будет 1. Уравнение (1) — это знакомое соотношение трех сторон прямоугольного треугольника: $a^2 + b^2 = c^2$.

Векторы

Векторные обозначения — это еще один математический инструмент, который, как мы предполагаем, уже встречался вам ранее, но, просто ради выравнивания уровня подготовки, сделаем небольшой обзор векторных методов в обычном трехмерном пространстве.

Вектор можно считать объектом, имеющим как длину (или *величину*), так и направление в пространстве. Примером может служить сдвиг (параллельный перенос). Если объект перемещается из некоторого исходного положения, недостаточно сказать, насколько далеко он передвинулся, чтобы определить, куда его занесет. Надо также указать направление перемещения. Сдвиг — это простейший пример векторной величины. Графически вектор изображается стрелкой, имеющей длину и направление, как показано на рис. 12.

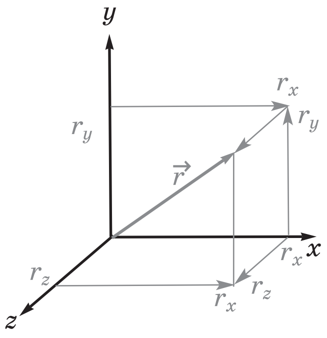

Рис. 12. *Вектор* $\vec{r}$ *в декартовой системе координат*

При алгебраической записи векторы обозначаются стрелкой над буквой. Так, символ для смещения — $\vec{r}$. Для обозначения величины, или длины вектора используется символ модуля (абсолютного значения). Например, длина вектора $\vec{r}$ обозначается $|\vec{r}|$.

Теперь рассмотрим операции, которые можно выполнять с векторами. Прежде всего их можно умножать на обычные вещественные числа. При работе с векторами такие числа часто называют специальным термином — *скаляры*. Умножение на положительное число просто умножает на соответствующее число длину вектора. Но можно также умножить вектор на отрицательное число, что изменит его направление на противоположное. Например, $-2\vec{r}$ — это вектор, который вдвое длиннее $\vec{r}$ и направлен в противоположную сторону.

Векторы можно складывать. Чтобы сложить $\vec{A}$ и $\vec{B}$, расположите их так, как показано на рис. 13, чтобы получился параллелограмм (направления векторов должны сохраняться). Сумма векторов определяется длиной и направлением диагонали.

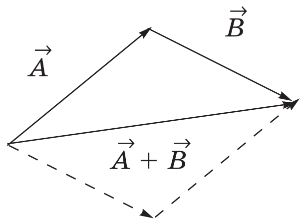

Рис. 13. *Сложение векторов*

Раз векторы можно складывать и раз их можно умножать на отрицательные числа, то их можно и вычитать.

УПРАЖНЕНИЕ 2

Сформулируйте правило вычитания векторов.

Векторы также можно описывать их компонентами. Начнем с трех перпендикулярных осей x, y, z. Теперь определим три *единичных вектора*, которые направлены вдоль координатных осей и имеют единичную длину. Их также называют *базисными векторами*, или *ортами*, а совокупность трех единичных векторов, лежащих на координатных осях, — *базисом*. Три базисных вектора в декартовых координатах традиционно обозначаются $\hat{i}$, $\hat{j}$ и $\hat{k}$ (рис. 14). В более общем виде мы пишем $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ и $\hat{e}_3$, когда работаем с координатами (x_1, x_2, x_3). Здесь символ ^ («шапочка», в английском: caret) говорит о том, что мы имеем дело с единичным вектором. Единичные векторы полезны тем, что любой вектор $\vec{V}$ можно разложить на них следующим образом:

$$\hat{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}. \tag{2}$$

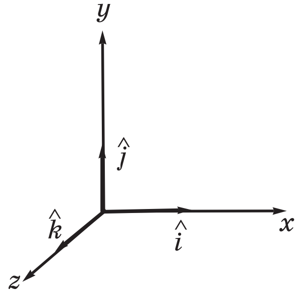

Рис. 14. *Базисные векторы декартовой системы координат*

Здесь величины V_x, V_y и V_z — это числовые коэффициенты, на которые нужно домножить базисные векторы, чтобы получить $\vec{V}$. Их также называют *компонентами* $\vec{V}$. Можно сказать, что формула (2) — это *линейная комбинация* базисных векторов. Или другими словами: мы складываем базисные векторы, умножая их на соответствующие коэффициенты. Компоненты вектора могут быть положительными или отрицательными. Можно также записать вектор как список его компонент — в нашем случае (V_x, V_y, V_z). Абсолютную величину вектора можно получить из его компонент, применив трехмерную теорему Пифагора:

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \tag{3}$$

Можно умножить вектор $\vec{V}$ на скаляр α путем умножения на α всех его компонент:

$$\alpha\vec{V} = \left(\alpha V_x, \alpha V_y, \alpha V_z\right).$$

Сумму двух векторов можно записать как сумму их соответствующих компонент:

$$\left(\vec{A} + \vec{B}\right)_x = \left(A_x + B_x\right),$$

$$\left(\vec{A} + \vec{B}\right)_y = \left(A_y + B_y\right),$$

$$\left(\vec{A} + \vec{B}\right)_z = \left(A_z + B_z\right).$$

Можно ли перемножать векторы? Да, и не одним способом. Один из типов умножения — векторное произведение — дает новый вектор. Но мы пока не будем заниматься векторным умножением, а рассмотрим только второй вариант, называемый *скалярным произведением*. Скалярное произведение двух векторов — это обычное число, скаляр. Для векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ оно определяется следующим образом:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |A||B|\cos\theta,$$

где θ — угол между векторами. На повседневном языке скалярное произведение — это произведение длин двух векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение можно также записать в компонентной форме:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.$$

Это позволяет легко вычислять скалярное произведение по известным компонентам векторов.

УПРАЖНЕНИЕ 3

Покажите, что длина вектора удовлетворяет условию $\left|\vec{A}\right|^2 = \vec{A}\cdot\vec{A}$.

УПРАЖНЕНИЕ 4

Пусть ($A_x = 2$, $A_y = -3$, $A_z = 1$), а ($B_x = -4$, $B_y = -3$, $B_z = 2$). Вычислите длины векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$, их скалярное произведение и угол между ними.

Важное свойство скалярного произведения состоит в том, что оно обращается в нуль, если векторы *ортогональны* (перпендикулярны). Запомните это, поскольку нам придется использовать данное свойство для доказательства перпендикулярности векторов.

УПРАЖНЕНИЕ 5

Определите, какая пара из следующих векторов ортогональна: (1, 1, 1), (2, −1, 3), (3, 1, 0), (−3, 0, 2).

УПРАЖНЕНИЕ 6

Можете ли вы объяснить, почему произведение двух ортогональных векторов равно 0?