В. И. Арнольд

Вещественная алгебраическая геометрия

Москва
Издательство МЦНМО
2009

УДК 512.7
ББК 22.147
А84

Издание подготовлено при поддержке
Фонда Дмитрия Зимина «Династия»

Арнольд В. И.
А84 Вещественная алгебраическая геометрия. — М.: МЦНМО, 2009. — 88 с.

ISBN 978-5-94057-443-9

Эта брошюра, написанная выдающимся современным математиком академиком РАН В. И. Арнольдом, основана на прочитанных автором популярных лекциях для старшеклассников. В живой и увлекательной форме излагаются основы теории алгебраических кривых в самых разных аспектах: от свойств конических сечений и до шестнадцатой проблемы Гильберта и понятия рода комплексной кривой.

Рекомендуется всем интересующимся математикой, начиная со старшеклассников и студентов младших курсов.

ББК 22.147

ISBN 978-5-94057-443-9

Введение

В этой книге речь пойдет об одном из самых фундаментальных вопросов математики: о соотношении между алгебраическими формулами и геометрическими образами.

На одном из первых международных математических конгрессов (в Париже в 1900 г.) Д. Гильберт сформулировал один частный случай этого вопроса в виде 16-й проблемы (своего списка из 23 проблем, оставляемых XIX веком в наследство веку XX).

Несмотря на простоту и важность этой проблемы (в том числе и для многочисленных приложений) она до сих пор не решена (хотя открыто много замечательного, как вы сейчас увидите).

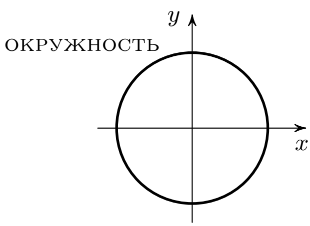
Пусть f — многочлен (с вещественными коэффициентами) степени n от двух переменных x и y. Вопрос Гильберта состоит в том, чтобы исследовать, какое топологическое строение может иметь алгебраическая кривая, заданная на евклидовой плоскости с декартовыми координатами x и y уравнением

$$f(x, y) = 0.$$

Пример. Если $n = 1$, то это уравнение задает прямую, все прямые устроены топологически одинаково.

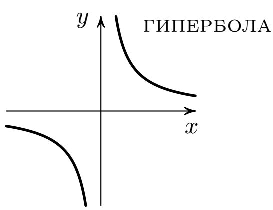
Если $n = 2$, то, как вы знаете, уравнение может задавать, например, окружность

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$



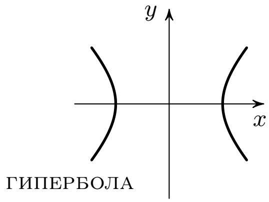
или гиперболу

$$xy - 1 = 0,$$



в другом виде

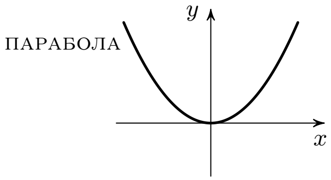
$$x^2 - y^2 - 1 = 0.$$



Эти кривые топологически различны: окружность связна, а гипербола состоит из двух связных компонент (называемых ветвями), уходящих притом на бесконечность (вдоль «асимптот» $\{x = 0\}$ и $\{y = 0\}$ для первой гиперболы и $\{y = x\}$ и $\{y = -x\}$ для второй).

Уравнение второй степени может задавать и параболу

$$y - x^2 = 0$$



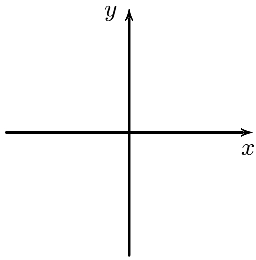
(которая отличается топологически и от окружности, и от гиперболы) — она топологически эквивалентна прямой линии.

Глава 1

Геометрия конических сечений

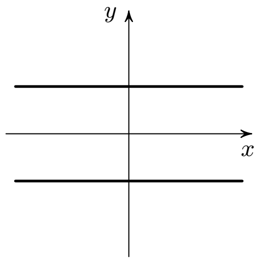
Уже древние хорошо знали, что никаких других гладких кривых, кроме эллипса, гиперболы и параболы, уравнения второй степени задавать не могут, исключая лишь особые случаи пары пересекающихся прямых

$$xy = 0$$



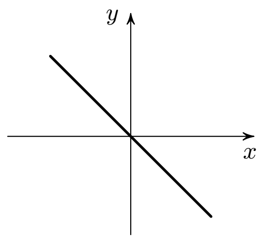
и пары параллельных прямых

$$y^2 - 1 = 0,$$



которые в еще более особом случае могут сливаться в одну прямую

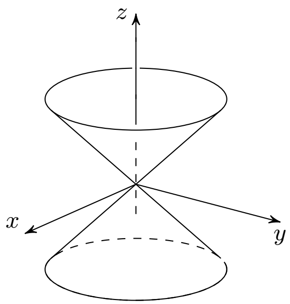
$$x^2 + 2xy + y^2 = 0$$



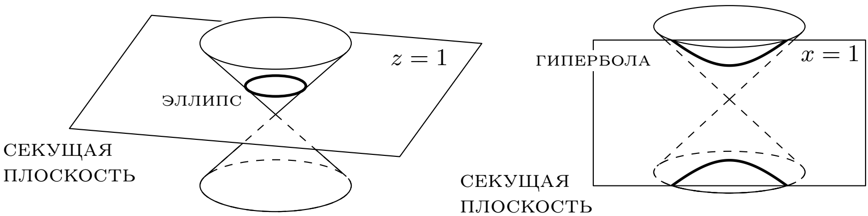
(а в совсем особом случае тождественно равного нулю многочлена f уравнение $f(x, y) = 0$ задает всю плоскость).

Древние называли кривые второй степени коническими сечениями, потому что именно они получаются при пересечении плоскостями конуса

$$z^2 = x^2 + y^2.$$



Например, сечение плоскостью $z = 1$ дает окружность, а сечение плоскостью $x = 1$ дает гиперболу:



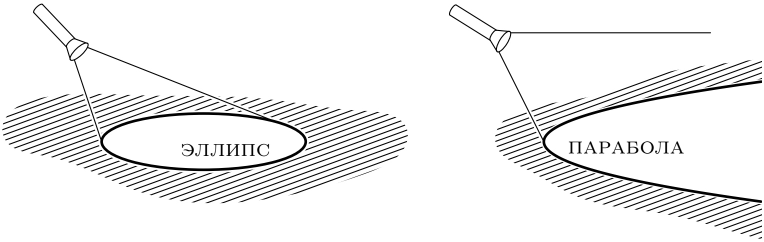
Задача. Какое сечение конуса плоскостью есть парабола?

Решение. Будем наклонять горизонтальную плоскость $z = 1$, непрерывно поворачивая ее до вертикального положения плоскости $x = 1$.

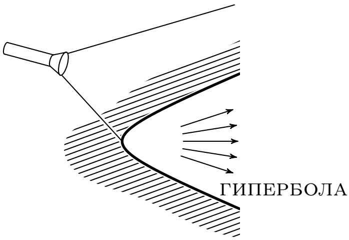
Вначале окружность, исказившись, остается замкнутой кривой пересечения. Но, по мере увеличения наклона, она все больше вытягивается. В момент, когда наклоняемая плоскость станет параллельной одной из составляющих конус прямых, линия пересечения уйдет на бесконечность — это и есть парабола.

Наклонив плоскость еще немного, мы заметим, что она начала пересекать (где-то очень далеко) и нижнюю половину конуса ($z < 0$), а не только верхнюю: начиная с этого момента параболичности линия пересечения — гипербола (а до него — эллипс).

Все это можно увидеть, освещая землю конусом лучей фонаря. Если он сильно наклонен, то светлое пятно эллиптично. Когда верхний луч конуса становится горизонтальным, освещенный участок ограничен параболой: он уходит на бесконечность (именно по направлению горизонтального луча).

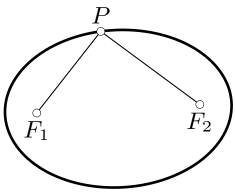


Если же некоторые лучи уходят вверх, то граница светлого пятна гиперболична (в нем умещается целый сектор разных направлений):



Определение. *Эллипсом* называется геометрическое место точек P на плоскости, сумма расстояний которых до двух заданных точек плоскости (называемых фокусами эллипса, F_1 и F_2) постоянна.

$$|PF_1| + |PF_2| = \text{const}$$



Задача. Докажите, что пересечение кругового конуса плоскостью, наклон которой к оси конуса превосходит наклон к ней составляющих конус прямых, есть эллипс.

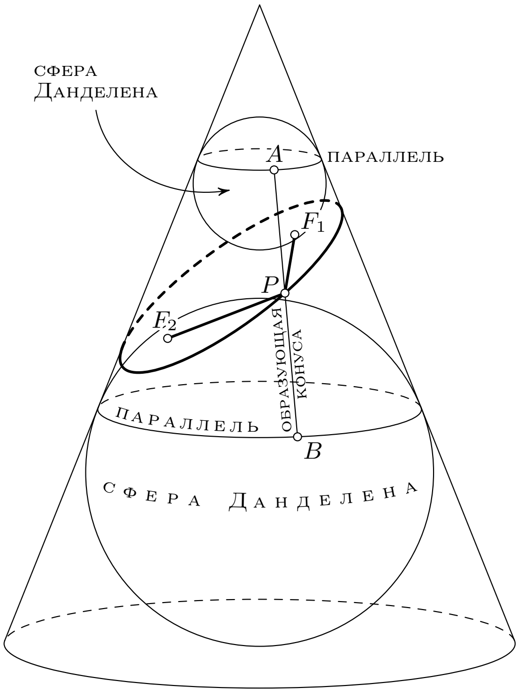
Решение. Впишем в конус два шара: один выше, а другой ниже плоскости. Увеличивая и опуская верхний вписанный шар, мы коснемся им плоскости сечения. Обозначим точку касания через F_1. Точно так же, уменьшая и поднимая нижний вписанный шар, мы коснемся им плоскости сечения. Обозначим эту точку касания через F_2.

Две касательные к шару, проведенные из одной точки пространства, имеют одинаковые длины. Поэтому для любой точки P на линии пересечения плоскости с поверхностью конуса выполняются равенства

$$|PF_1| = |PA|, \quad |PF_2| = |PB|,$$

где A и B — точки образующей конуса (прямой, соединяющей P с вершиной конуса), лежащие на параллелях, по которым конус касается верхнего и нижнего шара.

Итак, $|PF_1| + |PF_2| = |PA| + |PB| = |AB|$ представляет собой расстояние между параллелями касания конуса с верхним и нижним шарами, измеряемое вдоль образующей конуса, проходящей через точку P.

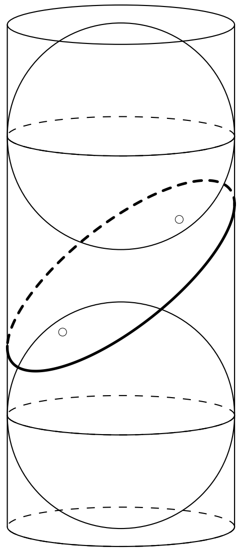


Но это расстояние вдоль любой образующей одинаково, так как при вращении вокруг вертикальной оси конуса и сам конус, и оба касающихся конуса шара переходят сами в себя. Итак, $|PF_1| + |PF_2| = \text{const}$, т. е. линия пересечения конуса плоскостью — эллипс (с фокусами F_1 и F_2).

Сферы, использованные в этом доказательстве, называются *сферами Данделена* (по имени математика, придумавшего описанное выше доказательство).

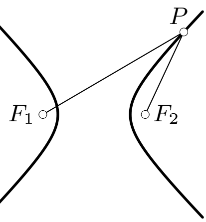
Задача. Докажите, что пересечение цилиндра плоскостью, пересекающей его ось (в одной точке) — эллипс и что все эллипсы можно получить таким образом из цилиндров.

Указание. Рассмотрите сферы Данделена, вписанные в цилиндр.



Определение. *Гиперболой* называется геометрическое место точек P на плоскости, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек плоскости (называемых *фокусами* гиперболы, F_1 и F_2 на рисунке) имеет постоянный модуль:

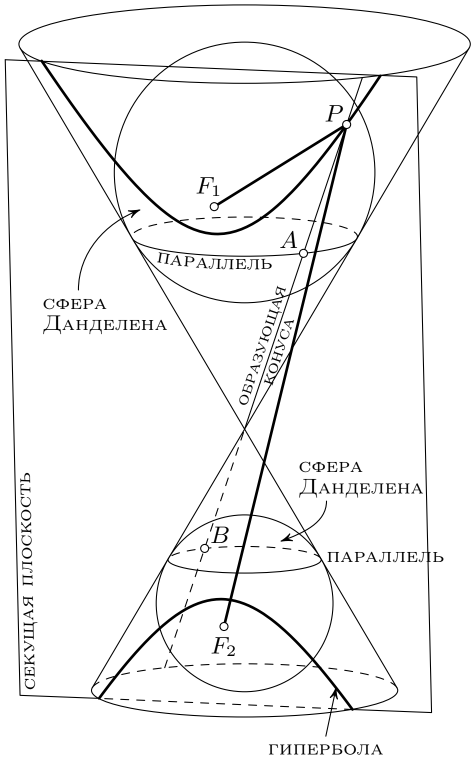
$$\big||PF_1| - |PF_2|\big| = \mathrm{const}$$



Задача. Докажите, что пересечение поверхности конуса плоскостью, пересекающей обе его половины, — гипербола.

Указание. Постройте соответствующие сферы Данделена — одна касается верхней половины конуса, а другая нижней, вдоль целых параллелей.

Расстояния от точки P до верхней сферы вдоль обеих касательных PF_1 и PA одинаковы. Точно так же равны и длины касательных PF_2 и PB к нижней сфере. Поэтому разность длин касательных к обеим сферам равна расстоянию между точками A и B параллелей касания сфер с конусом вдоль соединяющей эти точки касания образующей PAB конуса (прямой, соединяющей точку P с вершиной конуса).



$$|PF_1| = |PA|,$$
$$|PF_2| = |PB|,$$
$$\big||PF_1| - |PF_2|\big| = |AB|$$

Но это расстояние AB между соответственными точками на параллелях не зависит от выбора точки P, так как при вращении конуса вокруг его оси обе сферы (и их параллели касания с конусом) переходят в себя, а любая образующая конуса переходит в любую другую (при надлежащем повороте). Итак, линия пересечения конуса с плоскостью — гипербола с фокусами в точках F_1 и F_2 касания плоскости со сферами Данделена.

Определение. *Параболой* называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от некоторой прямой D (называемой *директрисой параболы*) этой плоскости и от некоторой не лежащей на этой